В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

Основні фігури

7 клас

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх
навчальних закладів

Підручник для учнів, які прагнуть знати більше,
та вчителів, які хочуть вчити краще

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2015

УДК 514 (075.3)
ББК 22.151я72
Т12

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
О.Г. Кукуш,
вчитель математики Червоноградської ЗОШ № 11, вчитель-методист
О.Г. Лапій

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 20. 07. 2015 р. № 777)

Тадеєв В.О.
Т12 Геометрія : підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл. / В.О Тадеєв. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. — 296 с.

ISBN 978-966-10-3446-3

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Він містить обов'язковий обсяг теоретичного матеріалу, а також незначне розширення «для тих, хто хоче знати більше». Наведені приклади розв'язування задач та задачі і вправи для групової і самостійної роботи. У кінці кожного розділу подається зведений перелік основних теоретичних відомостей, питання для самоконтролю та завдання для проведення контрольних робіт.

При викладі теоретичного матеріалу і підборі задач значна увага приділяється міжпредметним зв'язкам та питанням історичного, світоглядного і методологічного характеру.

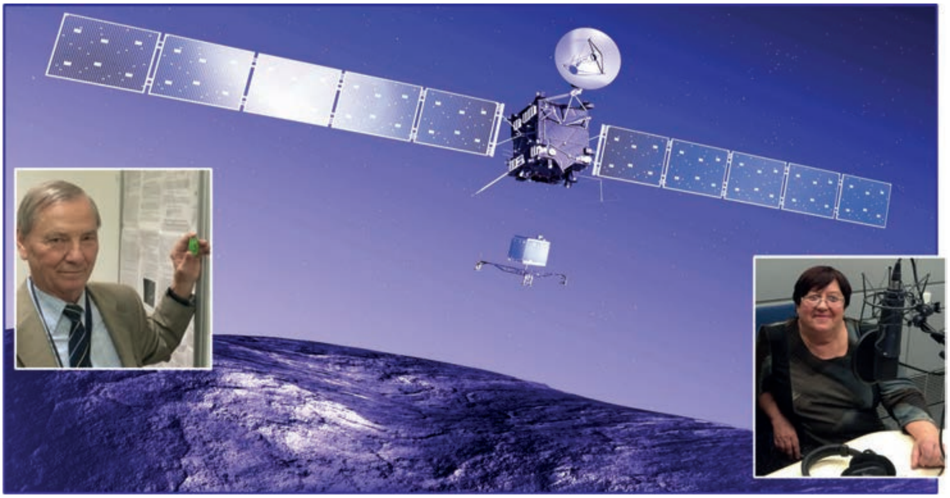
Для учнів та вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 514 (075.3)
ББК 22.15я72

ISBN 978-966-10-3446-3

Піктограмою у підручнику позначено ті його електронні складові, які можна відкрити за посиланням:

http://www.bohdan-digital.com/edu.



Напутнє слово всесвітньо відомих українських учених-астрофізиків Клима Чурюмова і Світлани Герасименко*)

Дорогі семикласники!

Усі ми — зоряні діти. Унаслідок трансформації зір першого покоління, їхня речовина збиралася у величезні хмари, а з них народжувалися зорі другого покоління та оточуючі їх планети. Однією із зір другого покоління стало наше Сонце, а його планетою — Земля. Чи не тому таким пристрасним є прагнення людини до зір, частки яких є всередині кожного з нас? Однак для того, аби мати змогу осягати велич і гармонію Космосу, а в ньому унікальність нашої земної цивілізації, потрібно наполегливо вивчати точні науки — астрономію, фізику, математику.

За цим підручником ви приступаєте до вивчення геометрії — науки, котра, незважаючи на своє земне походження (а її назва в дослівному перекладі з грецької мови означає «вимірювання землі»), завжди була й космічною. Вже найдавніші учені-геометри спочатку шукали порядок і гармонію у Космосі і тільки після цього переносили її у свої земні теорії, а будівничі й митці втілювали у творіннях архітектури, техніки, живописного та декоративного мистецтва. Не меншою мірою ця космічна риса геометрії була характерною й для пізніших епох, а в нових формах — і для сьогодення. Глибоко символічно, що вимірювання довжин у метрах прийшло у геометрію з геодезії, а вимірювання кутів у градусах — з астрономії, а разом вони поєдналися в аксіоматичній основі сучасної геометрії. У цьому підручнику ви постійно матимете нагоду помічати ці космічні риси геометрії, чим він вигідно вирізняється з-поміж інших. І ми, як професійні учені, котрим доля дарувала щастя зробити свій внесок у розкриття Космічної гармонії, закликаємо вас з цікавістю й наполегливістю вивчати геометрію, що стала однією з найважливіших ланок у ланцюгу культурних надбань цивілізації і є потужним фундаментом для її майбутніх досягнень та злетів.

Вивчайте науки — і ваші зорі усміхнуться вам!

---

*) Відкривачі комети Чурюмова–Герасименко, яку в 2004 р. Європейське космічне агентство обрало для втілення унікального міжнародного проекту «Розетта» із запуску космічного зонда та посадки спускового модуля на ядро комети. Про них і про проект «Розетта» дивіться на наступній сторінці. — *Прим. видавництва.*

Клим Чурюмов і Світлана Герасименко: миті космічної одіссеї[*)]

Коли ми були молодими

Ліворуч. Напередодні запуску «Розетти». Космодром Куру, Французька Гвіана.
У центрі: старт ракети-носія «Аріан-5» (2 березня 2004 р.).
Праворуч. Знімок перемички ядра комети з космічного апарата «Розетти» (21 серпня 2014 р.)

Ліворуч і в центрі. Мить посадки модуля «Філи» на ядро комети Чурюмова–Герасименко (12 листопада, 2014 р.)
Праворуч. «Розетта» на орбіті комети Чурюмова–Герасименко, а її посадковий модуль «Філи» досліджує поверхню ядра (ілюстрація: E. Viktor).

[*)] **Клим Іванович Чурюмов** народився у 1937 р. в Миколаєві. Був четвертим з восьми дітей у сім'ї. Батько загинув під час Другої світової війни, у 1942 р. У 1949 р. сім'я переїхала до Києва. Після закінчення семирічки Клим вступив до Київського залізничного технікуму і в 1955 р. закінчив його з відзнакою. Це давало змогу одразу вступати до вищого навчального закладу. Клим обрав фізичний факультет Київського національного університету ім. Тараса Шевченка і закінчив його за спеціальністю «фізика-астрономія». Після закінчення аспірантури приступив до наукової робота під керівництвом видатного ученого-астронома професора С.К. Всехсвятського.

У 1969 р. Київський університет організував чергову експедицію до Астрофізичного інституту Алмати (Казахстан). Відрядили співробітника кафедри астрономії Клима Чурюмова, аспірантку Світлану Герасименко та фотолаборантку Людмилу Чиркову. Після повернення з експедиції до Києва, 22 жовтня 1969 р., К. Чурюмов і С, Герасименко, вивчаючи знімки короткоперіодичної комети Комас Сола, зроблені 9 та 11 вересня (спостереження С. Герасименко та Л. Чиркової), а також 21 вересня 1969 р. (спостереження К. Чурюмова), разом відкрили нову комету, якій було присвоєно ім'я комети Чурюмова-Герасименко.

Зараз К.І. Чурюмов — професор Київського університету імені Тараса Шевченка і за сумісництвом директор науково-просвітницького центру «Київський планетарій». Він є членом-кореспондентом Національної академії наук України і дійсним членом Нью-Йоркської академії наук, президентом Українського товариства любителів астрономії. Ім'ям К.І. Чурюмова названа мала планета № 2627, відкрита у 1984 р.

Світлана Іванівна Герасименко народилася у 1945 р. в районному містечку Баришівці на Київщині. Її батьками були вчителі математики, які й прищепили доньці любов до точних наук. Після закінчення школи із золотою медаллю Світлана вступила на відділення астрономії фізичного факультету Київського університету. У 1969 р. вона, вже аспіранткою, разом зі співробітником кафедри астрономії Климом Чурюмовим, стала учасницею експедиції до Алмати і там 9 та 11 вересня відзняла 3 фотонегативи з новою кометою. У 1973 р. С.І. Герасименко на запрошення Інституту астрофізики Таджикистану переїхала до Душанбе і відтоді працює співробітницею цього Інституту, проводячи спостереження і вивчення комет.

Передмова автора і видавництва

Шановні друзі! Ви розгорнули підручник з геометрії, науки, яка споконвіку вражала людський розум своєю досконалістю. З давніх-давен геометрія вважалася неперевершеною школою мудрості, а її вивчення розвивало й шліфувало мислення. Переказують, що над входом до Академії, яку заснував видатний давньогрецький філософ Платон, був напис: «Не заходь, не обізнаний з геометрією!».

За що ж так цінували цю науку? — За те, що вона розвивала мистецтво аргументації, а аргументація була основою того нового демократичного суспільства, яким так пишалися греки і яке вони всіляко протиставляли східним деспотіям. Символічно, що серед сімох легендарних мудреців-законодавців, котрих греки вважали своїми духовними учителями, на першому місці вони завжди називали ім'я Фалеса, який, власне, законодавцем і не був. Фалес був ученим і, як стверджують легенди, логічно довів лише декілька простих геометричних істин. Однак цим він продемонстрував здатність людського розуму відшукувати об'єктивну істину, і цей постулат став основою західної цивілізації.

Отже, навчаючись геометрії, ви навчатиметеся мистецтву аргументації, яке є базовою цінністю сучасного демократичного суспільства.

Переміщаючись «машиною часу» далі, потрапляємо у XVII ст. Виникло нове природознавство: Галілей, Кеплер, Декарт, Паскаль, Ньютон... А давня геометрія не тільки не стала осторонь нових тенденцій, а й перетворилася на теоретичну основу експериментальної науки, залишаючись водночас основою раціоналістичної філософії. Своєрідне відображення цієї нової тенденції знаходимо у розповідях про мандри казкового Гуллівера, героя роману Джонатана Свіфта. Прибувши на літаючий острів Лапуту, Гуллівер найбільше здивувався тому, що все життя його мешканців оберталося довкола геометрії. Навіть їхня буденна мова рясніла геометричними термінами. Та якби Гуллівер був нашим сучасником, то такого подиву, мабуть, у нього і не було б. Тепер геометричними термінами пронизані не тільки природничі і технічні науки, а й гуманітарні, мистецтвознавство, мова

Іменем Світлани Герасименко названо астероїд № 3945, відкритий у 1982 р.

Наприкінці лютого 2004 р. Світлана Герасименко разом із Климом Чурюмовим були присутніми на космодромі Куру у Французькій Гвіані, з якого стартувала ракета-носій «Аріан-5», що вивела у космос європейський міжпланетний зонд Rosetta. Основною метою місії Rosetta була посадка спускового модуля на чотирьохкілометрове ядро комети Чурюмова-Герасименко. Ця історична м'яка посадка відбулася 12 листопада 2014 р., близько 18 години за київським часом. Відкривачі комети спостерігали за спуском модуля «Філи» в он-лайн режимі у Європейському центрі управління польотом «Розетти» у німецькому місті Дармштадті (Клим Чурюмов) та в Німецькому космічному агентстві у місті Кельні (Світлана Герасименко). — *Прим. видавництва.*

щоденного спілкування. Ось лише найпоширеніші слова, які побутують у нашому мовленні й запозичені з геометрії: аксіома, паралелі, площина, вектор, сфера, координати, фокус, полюс, сектор, вимір, багатовимірність, симетрія тощо. Певна річ, аби правильно розуміти і вживати ці слова, потрібно знати їхній первісний геометричний зміст. «Книга природи», — як влучно зауважив Ґалілей, «написана мовою геометрії».

Отже, *навчаючись геометрії, ви прилучатиметеся до надбань світової культури*, ставатимете обізнаними й компетентними у тих питаннях, в яких без цього відчували б себе немовби прибульцями із варварських епох.

І ось ми... у XXI ст. Комп'ютерна графіка і дизайн, захмарні архітектурні споруди, мобільний зв'язок, GPS-навігація, проникнення у глибини космосу і матерії... Геометричні ідеї і принципи лежать в основі і цих надбань. Вивчаючи геометрію, ви в цьому не раз переконаєтеся.

Отже, *і з практичної точки зору геометрія необхідна*.

Навчання мистецтву аргументації, прилучення до надбань світової культури і практичні застосування геометрії — це ті основні завдання, які ставляться у цьому підручнику. Вони невіддільні одне від одного, як невіддільні, рівнозначні і взаємодоповнюючі Віра, Надія і Любов у християнській моралі. Погортайте підручник, і ви навіть за ілюстративним матеріалом помітите, що кожному із зазначених завдань відведено належне місце.

По всьому тексту ви помітите низку розпізнавальних знаків, які мають своє символічне значення:

На уроки вас запрошуватиме наш шкільний дзвоник, перев'язаний жовто-блакитною стрічкою.

Рубрику вправ і задач усюди супроводжуватиме богиня мудрості Афіна. Вибрано рельєфне зображення Афіни з геометричними атрибутами — кутником, циркулем, лінійкою і сферою, створене Філіппом-Роланом Роландом для західного фасаду паризького Лувра.

Задачі і вправи розміщені в кінці кожного параграфів за порядком наростання їхньої складності. Найпростіші з них (у тому числі й усні вправи) позначені світлим кружечком, а складніші — темним. У кінці кожного розділу подані типові завдання для контрольних робіт (у двох варіантах). Учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, будуть застраховані від неприємних «сюрпризів» на контрольній.

Чимало задач у підручнику подається з розв'язаннями. Відповідна рубрика «Розв'язуємо разом» позначена красномовною світлиною з учителем і ученицею, які разом розв'язують задачу. На поданих у тексті прикладах демонструються застосування встановлених теоретичних фактів, а в окремих випадках — і корисні додаткові відомості та загальні підходи до розв'язування геометричних задач.

У підручнику є матеріал «Для тих, хто хоче знати більше». Він розрахований на учнів, які вже зараз, не чекаючи старших класів, хочуть дізнаватися про математику більше. Ці тексти подаються на жовтому і блакитному тлі та супроводжуються портретами геніальних математиків Михайла Остроградського і Софії Ковалевської. Життєвий шлях цих учених переконливо свідчить, що математика однаково доступна як чоловікам, так і жінкам, і що успіхи в науці не залежать від місця народження дослідника: Остроградський народився на хуторі, а Ковалевська — у столиці.

Крім навчального матеріалу, підручник містить спеціальну рубрику «Сторінки історії». Її супроводжує муза історії Кліо зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас» (картина прикрашає завісу Львівського оперного театру). Муза тримає книгу й перо, а промовистим порухом лівої руки немовби запрошує озирнутися назад. Ознайомлення з поданими у цій рубриці відомостями розширить ваш кругозір, допоможе збагнути важливі внутрішні мотиви розвитку математики. А це, у свою чергу, сприятиме глибшому розумінню науки.

У кінці кожного розділу подається зведений перелік усього вивченого теоретичного матеріалу, а в рубриці «Перевір себе» — запитання для самоконтролю. Цю рубрику супроводжує зображення міфічної пташки-Сфінкса з погруддям жінки і тулубом лева, яка, за переказами, пропускала далі лише тих подорожніх, хто правильно відповів на її запитання.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у вивченні геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!

Зірка геометрії.
Фрагмент композиції Ігоря Макаревича та Олени Єлагіної
«Геометрія космосу» (2008 р.)

Зображені у цій композиції креслярські прилади — лінійка, транспортир і косинець — допомагатимуть нам фіксувати ті основні фігури на площині та їхні властивості, які слугують основою геометрії.

Розділ I

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

Вступ

Урок 1

«Мислю — отже, існую» — так коротко характеризував сутність людського буття знаменитий французький філософ і математик XVII ст. Рене Декарт. Цим він стверджував, що справжнє життя людини невід'ємне від мислення і неможливе без нього.

Мислення багатогранне, як багатогранний світ довкола нас. А оскільки ми живемо у просторі, то повинні вміти мислити й просторовими образами. Особливо, якщо прагнемо не тільки пристосовуватися до умов, а й пізнавати, удосконалювати світ.

Просторові образи описують за допомогою **геометричних фігур**. Прикладами геометричних фігур є трикутники, прямокутники, кола, паралелепіпеди, кулі. Наука про геометричні фігури називається **геометрією**.

Зародки геометрії виникли дуже давно, ще коли головними просторовими образами, з якими людині доводилося мати справу, були ділянки землі. Звідси й назва «геометрія», що в перекладі з грецької якраз і означає «вимірювання землі». Проте з часом до цієї первісної геометрії долучалися нові фігури. З удосконаленням будівництва геометричні форми здіймалися

Рене Декарт. Молоді роки.
Портрет невідомого
художника
(Музей августинців
у Тулузі)

Ансамбль Свято-Успенської Почаївської Лаври

Фрагмент архітектури готичного собору

Ансамбль Маріїнського палацу в Києві

Архітектурний проект, побудований засобами 3D-комп'ютерної графіки

вгору, з успіхами астрономії — поширювалися на космічні простори, з розвитком фізики занурювалися углиб матерії.

Придивіться до будь-якої архітектурної споруди чи ансамблю і ви побачите, як гармонійно поєднуються у них численні лінії та інші деталі — відрізки, дуги, кути, трикутники, прямокутники, круги, паралелепіпеди, призми тощо. Отже, у вас уже є певний геометричний інструментарій для осмисленого сприйняття просторової конструкції. Але чи зможете ви пояснити, як підібрані та припасовані ці деталі, як розраховані їхні розміри? Те саме можна спитати стосовно плану вашого парку, проектування спортивного чи торговельного комплексу тощо.

А як знаходять відстані до недоступних об'єктів, як визначили розміри Землі та інших планет, як створюють географічні та астрономічні карти?

Нарешті, як функціонує комп'ютерна графіка — цей невичерпний сучасний ресурс для проектування й зображення геометричних фігур?

Розуміння цих речей потребує глибокого вивчення геометрії. Мало закріпити в пам'яті назви геометричних фігур та навчитися їх розпізнавати, навіть, зображати. Потрібно ще й уявляти, як встановлюються зв'язки між різними їхніми складовими і як на основі цих зв'язків фігури конструюються. Це так само, як для вправного володіння мовою недостатньо лише певного словникового запасу, а потрібне знання граматики та синтаксису, або як для музичної творчості недостатньо лише нотної грамоти й набору «акордів», а необхідне знання основ композиції.

Тому вивчення геометрії потрібно розпочинати з детального розгляду найпростіших геометричних фігур, аби потім можна було крок за кроком переходити до складніших фігур і з'ясовувати, як ці складніші конструюються з найпростіших.

До найпростіших геометричних фігур належать точки, прямі і площини, а також відрізки, промені і кути. Ці фігури й будуть предметом вивчення у першому розділі.

Вгорі. Дзвіниця Джотто у Флоренції.
Внизу. Барельєф Ніно Пізано (1315—1368) **«Евклід»** на нижньому ярусі дзвіниці Джотто.

§1. Площина. Точки і прямі

Площину ми будемо уявляти у вигляді великого розгорнутого аркуша або класної дошки, вважаючи, що її можна скільки завгодно продовжити у будь-якому напрямку. Вважатимемо також, що всі геометричні фігури розміщені на площині. Площина — латинською «планум». Тому ту частину геометрії, в якій вивчаються фігури на площині, називають **планіметрією**. *Стереометрія*, тобто геометрія у просторі, вивчається у старшій школі.

Найелементарнішими фігурами на площині вважаються **точки** і **прямі лінії**, або просто **прямі**. За допомогою них конструюються усі інші плоскі фігури.

Уважається, що точка не має розмірів, хоч на рисунках точки зображуються невеликими кружечками. Знаменитий давньогрецький учений Евклід, який написав перший підручник з геометрії, називав точкою «те, що не має частин». Точки можна уявляти як сліди на аркуші від тонко загостреного олівця. *На площині існує безліч точок.*

Точки позначають великими літерами латинського алфавіту. На рис. 1.1 зображено деяку фігуру і позначено декілька її точок: A, B, C, D, E, K, M.

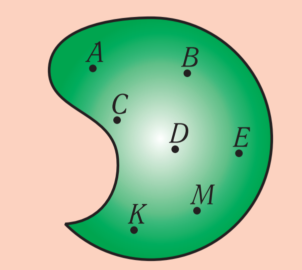


Рис. 1.1

Уявлення про пряму дає лінія, проведена під лінійку (рис. 1.2). Однією з найголовніших властивостей прямої є те, що вона цілком визначається двома своїми точками:

через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.

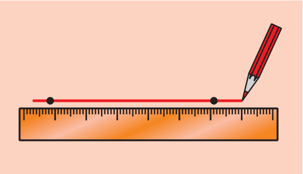


Рис. 1.2

Цю властивість називають *властивістю проведення прямої*.

На властивості проведення прямої засновується простий практичний спосіб для перевірки правильності лінійки або обробки рейки, бруса тощо. Якщо через дві точки провести під лінійку дві лінії, по-різному розміщуючи лінійку, як показано на рис. 1.3, і ці лінії не зіллються, то лінійка неправильна.

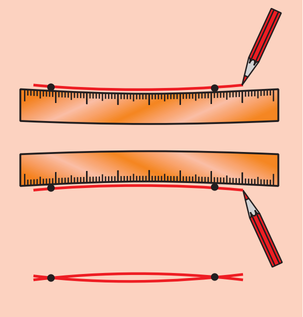


Рис. 1.3

Властивість проведення прямої передбачає, що пряма не має ніякої товщини, бо інакше кожна товщина визначала б свою лінію, яка проходить через ті самі точки.

Прямі позначають або двома великими літерами, якими позначені які-небудь дві точки прямої, або однією малою латинською літерою. На рис. 1.4 зображено дві прямі — пряму AB (її можна також позначити як BA) і пряму l.

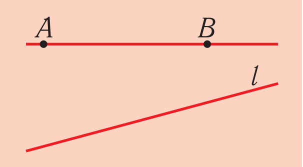


Рис. 1.4

Як і площина, пряма вважається необмеженою, хоча на рисунку, звісно, зображується лише певна обмежена частина прямої. Як і на площині, *на кожній прямій існує безліч точок*.

Якщо якась точка лежить на прямій, то кажуть також, що ця точка *належить* прямій, або що пряма *проходить через* цю точку. На рис. 1.5 зображено дві точки *A* і *B*, які належать прямій *l*, а також дві точки *P* і *Q*, які не належать їй.

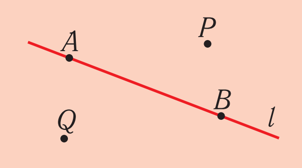


Рис. 1.5

Із властивості проведення прямої випливає, що дві різні прямі можуть мати щонайбільше одну спільну точку. Справді, якби вони мали дві спільні точки, то збігалися б, оскільки через дві точки можна провести лише одну пряму.

Про дві прямі, які мають одну спільну точку, кажуть, що вони *перетинаються* у цій точці. На рис. 1.6 зображено дві прямі *m* і *n*, які перетинаються у точці *P*.

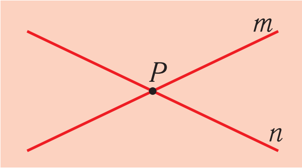


Рис. 1.6

Якщо прямі не мають жодної спільної точки, то вони називаються *паралельними* (в дослівному перекладі з грецької — «йдуть поруч»). На рис. 1.7 зображено паралельні прямі *a* і *b*. Скільки б не продовжувати зображення паралельних прямих, вони ніколи не перетнуться.

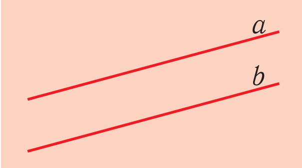


Рис. 1.7

Уявлення про площину дає не тільки аркуш паперу, стіл або класна дошка. Площину може представляти будь-яка інша рівна поверхня, наприклад, стелі, стіни, підлоги, спортивного майданчика, навіть просто рівної відкритої місцевості.

Так само й точки можуть представлятися не тільки слідами від олівця, а й іншими реальними об’єктами, розмірами яких можна знехтувати. Звісно, тоді проведення прямих виглядатиме по-іншому. На цьому ґрунтуються практичні застосування геометрії.

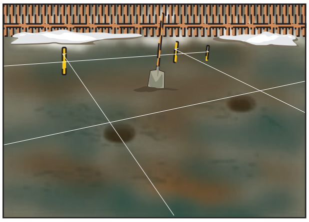
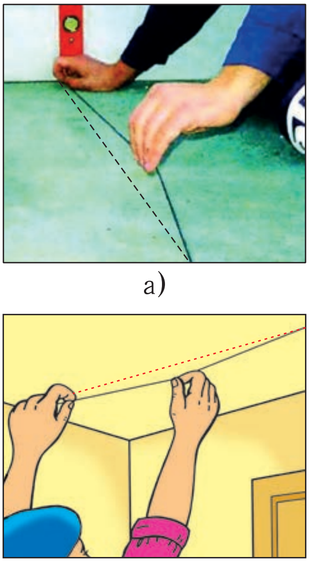


Рис. 1.8

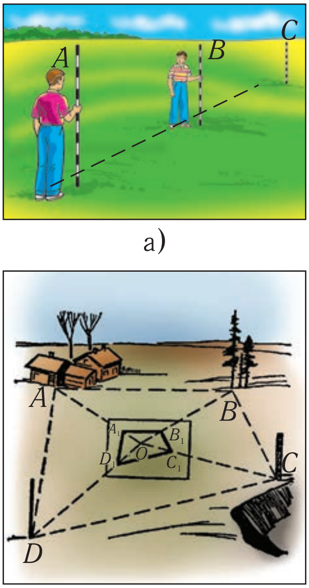
Наприклад, під час розбивки газонів, доріжок, фундаменту під забудову тощо точки фіксують кілками, а прямі проводять за допомогою мотузок (шнура) (рис. 1.8). Аналогічно чинять малярі (рис. 1.9, а–б), напинаючи шнур, змащений крейдою, між точками, через які потрібно провести пряму, а потім відпускаючи його. У кожному із таких застосувань виходить така собі «мотузяна» геометрія.



а)

б)

Рис. 1.9



а)

б)

Рис. 1.10

Рис. 1.11. Маленький Принц на своїй планеті. Рисунок Сент-Екзюпері

Принципово інакше діють геодезисти. Вони фіксують точки довгими палицями — віхами, а прямі «провішують» за допомогою візування. А саме: визначивши пряму двома віхами A і B, інші віхи C, D, ... ставлять між ними так, щоби при спостереженні із-за віхи A вони закривали віху B (рис. 1.10, а). За допомогою візування проводять і топографічні зйомки для складання планів місцевості або «прив'язки» до місцевості нового об'єкта для будівництва (рис. 1.10, б). Таку геометрію умовно можна назвати «променевою», оскільки роль прямих у ній відіграють зорові промені.

Те, що «мотузяна» геометрія збігається із «променевою» — радше щаслива випадковість, ніж необхідність. Неважко уявити собі такі фізичні умови, за яких цього не було б. Наприклад, такого не було б на планеті Маленького Принца з відомої повісті Антуана де Сент-Екзюпері (рис. 1.11). Ця планета була дуже маленькою, а тому шнур, напнутий між

Рис. 1.12

двома її точками, відхилявся б від зорового променя між ними. Те саме стосується й нашої планети Земля, якщо брати її у великих масштабах.

Для великих земних масштабів існує інша геометрія — *сферична*, яка суттєво відрізняється від геометрії на площині, тобто від планіметрії. Відмінність проявляється уже у властивості проведення прямої: на сфері можливе таке розміщення двох точок, при якому через них можна провести безліч сферичних прямих. Ви легко збагнете це, подивившись на глобус і на його меридіани, які перетинаються на Північному і на Південному полюсах (рис. 1.12).

Вивчаючи геометрію на площині, ми й далі не раз проводитимемо порівняння її з геометрією на сфері. Сферичну геометрію започаткували античні астрономи. Для них зручно було вважати, що небесні світила розміщуються на небесній сфері. В астрономії ця модель зоряного неба застосовується й досі. В епоху Великих географічних відкриттів та Відродження сферична геометрія давніх астрономів «спустилася» з небесної сфери на земний глобус і в такий спосіб стала поруч із прадавньою площинною геометрією. Яскравим відображенням цього об’єднання стали геометричні та астрономічні атрибути у живописних та графічних творах тієї епохи.

Мартен де Вос
(1532–1603).
Геометрія.
Гравюра. Бл. 1600 р.

Жан Леблон
(бл. 1594–1666).
Геометрія.
Гравюра (1636 р.)

Вправи і задачі

1°. Проведіть з допомогою лінійки пряму і позначте на ній три точки A, B, C. Випишіть усі можливі позначення для цієї прямої.

2°. На рис. 1.13 зображено дві прямі a і b та сім точок.
1) Як ще можна позначити ці прямі?
2) Назвіть точки, які належать прямій a, але не належать прямій b.
3) Назвіть точки, які належать прямій b, але не належать прямій a.

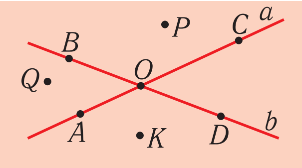


Рис. 1.13

4) Назвіть точки, які належать кожній із прямих.

5) Назвіть точки, які не належать жодній із прямих.

3°. Позначте в зошиті дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте потім дві точки K, L, які належать цій прямій, і дві точки M, N, які не належать їй. Що можна стверджувати про взаємне розміщення таких прямих:
а) AB і KL; б) AB і KM; в) KN і BA?

4°. Проведіть дві прямі, що перетинаються. Позначте ці прямі і точку їхнього перетину. Скільки спільних точок можуть мати дві прямі?

5°. На рис. 1.14 зображено три прямі. Назвіть ці прямі. Які з них перетинаються?

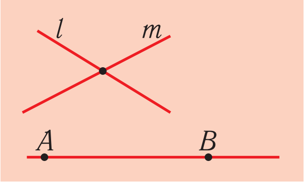


Рис. 1.14

6°. Зобразіть таке розміщення чотирьох точок A, B, C, D, щоб точки A, B, C належали одній прямій і точки B, C, D належали одній прямій.

7. Чи можуть три прямі перетинатися в одній точці? Як узагалі можуть розміщуватися три прямі, аби кожні дві з них перетиналися? Зробіть відповідні рисунки.

8. Проведіть пряму, а потім ще три прямі, які її перетинають. Які можливі характерні випадки взаємного розміщення усіх цих прямих?

9. На рис. 1.15 відображено спосіб перевірки якості обробки бруска за допомогою візування. Як би ви його пояснили?

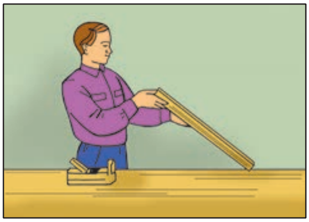


Рис. 1.15

10. Прямі l і m перетинаються в точці O, M — якась точка прямої m. Чи може точка M належати прямій l?

11. Скільком прямим може належати одна взята точка; дві взяті точки; три взяті точки; п'ять узятих точок?

12. На рис. 1.16 відображено один із так званих обманів зору (зорову ілюзію): лінії AB і CD видаються вигнутими, хоча насправді вони прямі. Виконайте цей рисунок у зошиті і перевірте, чи викликатиме він у вас такий самий обман зору.

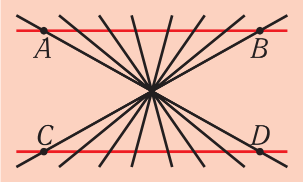


Рис. 1.16

13•. Позначте в зошиті дві точки A і B. Скільки прямих можна провести через точку A? Скільки — через точку B? Скільки — через обидві точки A і B? Чи можете ви обґрунтувати свої твердження?

14•. Позначте у зошиті чотири точки A, B, C, D так, як показано на рис. 1.17, а потім через кожні дві з них проведіть пряму. Скільки всього прямих буде проведено? Чи завжди чотири точки визначатимуть саме таку кількість прямих? Розгляньте можливі випадки.

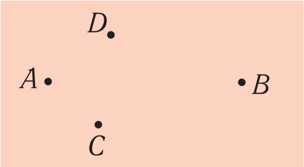


Рис. 1.17

15•. а) Проведіть такі чотири прямі a, b, c, d, щоби прямі a, b, c проходили через одну точку і прямі b, c, d теж проходили через одну точку.

б) Кожні дві із чотирьох накреслених прямих перетинаються. Скільки може бути точок перетину? Зобразіть усі можливі випадки.

§2. Відрізки, промені та півплощини

Уроки 2–3

Друга головна властивість прямої, поряд із властивістю проведення, стосується розміщення точок на ній.

Подивіться на рис. 1.18. На прямій *l* позначено три точки *A*, *B*, *C*, причому одна, і тільки одна з них, а саме, точка *C*, лежить між двома іншими — *A* і *B*. Таке справджується для будь-яких трьох точок прямої:

із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

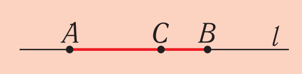


Рис. 1.18

Цю властивість називають *основною властивістю розміщення точок на прямій.*

Якщо точка *C* лежить на прямій *l* між точками *A* і *B* (див. рис. 1.18), то кажуть також, що точки *A* і *B* лежать *по різні боки* від точки *C*, або що точки *C* і *B* лежать *з одного боку* від точки *A*, а точки *A* і *C* — *з одного боку* від точки *B*.

Як і властивість проведення прямої, властивість розміщення точок на прямій теж не виконувалася б у геометрії на планеті Маленького Принца (див. рис. 1.11). Справді, про кожну із трьох точок *A*, *B*, *C*, розміщених на лінії, яка на поверхні кулі відіграє роль прямої, наприклад, на екваторі (рис. 1.19), можна сказати, що вона лежить між двома іншими.

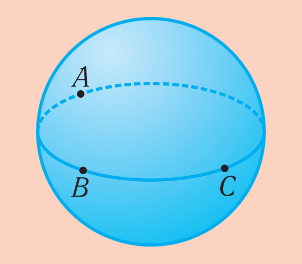


Рис. 1.19

Використовуючи властивість розміщення точок на прямій, можна означити перші фігури, які є похідними від основних фігур, тобто від точок і прямих. Це — відрізки і промені.

Означити або *дати означення* фігури — це описати такі властивості цієї фігури, які дають змогу (спосіб) вирізняти її з-поміж інших фігур або проводити побудову.

Візьмемо на прямій *a* дві точки *A* і *B* (рис. 1.20). Ними визначається сукупність точок *M* цієї прямої, які лежать *між* точками *A* і *B*. Усі ці точки утворюють *відрізок*.

Рис. 1.20

Означення.

***Відрізком* називається частина прямої, що складається з усіх точок, які лежать між двома її точками, разом із цими точками. Самі ці точки називаються *кінцями* відрізка, а всі решта точок відрізка називаються його *внутрішніми точками*.**

Один зі способів утворення матеріальних «відрізків», який наочно ілюструє походження цього терміна

Позначення відрізків утворюються з позначень їхніх кінців. Інколи відрізки позначають і однією малою літерою.

На рис. 1.20 зображено відрізок *AB* прямої *a*, *A* і *B* — його кінці, *M* — внутрішня точка.

Візьмемо тепер на прямій три точки *A*, *O*, *B*; нехай точка *O* лежить між точками *A* і *B* (рис. 1.21). Цими точками визначаться дві фігури. Першій належать точки *X* прямої, які відносно точки *O* лежать з того самого боку, що й точка *A*, другій — точки *Y* прямої, які відносно точки *O* лежать з того самого боку, що й точка *B*. Такі фігури називаються *променями* або *півпрямими*.

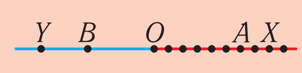


Рис. 1.21

Означення.

***Променем* (або *півпрямою*) називається частина прямої, що складається з усіх точок, які лежать з одного боку від деякої її точки, разом із цією точкою. Ця точка називається *початком* променя, а всі решта точок називаються *внутрішніми точками* променя.**

Якби ця колода була нескінченною в обидва боки, то після розпилу дістали б матеріальні моделі двох півпрямих

Позначають промені двома великими літерами, з яких перша вказує на початок променя, а друга — на яку-небудь внутрішню його точку. Часто промені позначають і однією малою літерою — так само, як прямі.

На рис. 1.21 точка O служить початком для двох променів: OA (його можна позначити і як OX) та OB (його можна позначити і як OY).

У назві «промінь» зафіксована певна схожість між геометричними і світловими променями: і ті, й інші мають початок, але не мають кінця, і є прямолінійними.

Світлові промені від маяка Pigeon Point у Каліфорнії (США). Фотограф Darvin Akteson (2010 р.)

На прямій існує два різні промені, що мають спільний початок, і цим початком пряма мовби розбивається на дві половини. Звідси й інша назва «*півпряма*» для кожної з них.

Означення.

Два різні промені однієї прямої зі спільним початком називаються *доповняльними* (або *взаємно доповняльними*) *променями.*

Отже, будь-яка точка прямої розбиває її на два взаємно доповняльні промені.

Щось схоже відбувається і з площиною, коли на ній провести пряму: пряма розбиває площину на дві *півплощини*.

Подивіться на рис. 1.22. На ньому точки A і B лежать з одного боку від прямої l, а точка C — з іншого боку. Відповідно, відрізок AB, що сполучає точки A і B, не перетинає прямої l, а відрізки CA і CB, що сполучають точку C з точками A і B, перетинають її.

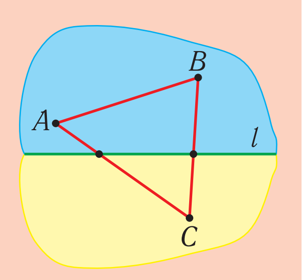


Рис. 1.22

Інакше це формулюють так: точки A і B лежать в одній півплощині з *граничною прямою* l, а точки A і C та B і C — у різних півплощинах.

Отже, маємо таку *основну властивість розміщення точок відносно прямої на площині*:

кожна пряма розбиває площину на дві півплощини.

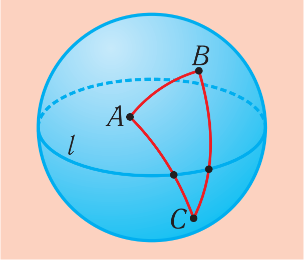


Рис. 1.23

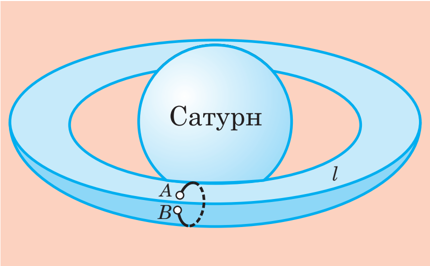
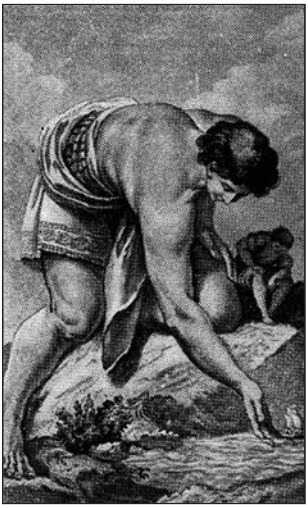


Рис. 1.24

Сатурн і його кільця. Підфарбована світлина з американського космічного зонда «Вояджер–1» (1980 р.)

Знову ж таки, незважаючи на «очевидність», ця властивість теж украй важлива для планіметрії. Щоправда, на підтвердження цього ми вже не можемо навести приклад геометрії на планеті Маленького Принца: як показує рис. 1.23 (порівняй його з рис. 1.22), на поверхні кулі ця властивість теж виконується. А от на кільцеподібній планеті, яку гіпотетично можна уявити утвореною, наприклад, унаслідок згущення кілець Сатурна (рис. 1.24), вона уже не виконувалася б. Справді, «пряма» *l*, яка проходить по зовнішньому обводу кільця, не розбиває його поверхню на дві частини, оскільки з точки *A* у точку *B* можна перейти через внутрішній бік.

Про такий факт, безсумнівно, мусив знати секретар сатурнійської академії, який у фантастичній повісті Вольтера «Мікромегас» супроводжував гіганта із Сиріуса у його космічних мандрах. Ми ж, якщо хочемо відмежуватися від геометрій таких світів і розбудовувати геометрію свого світу, неодмінно маємо зважати й на нашу «земну» основну властивість розміщення точок на площині.



Гігант із Сиріуса і «маленький» сатурнієць на планеті Земля. Гравюра Шарля Моне до повісті Вольтера «Мікромегас» (XVIII ст.)

Розв’язуємо разом

Задача.

Нехай A, B, C — довільні три точки на площині, що не лежать на одній прямій (рис. 1.25). Нехай пряма l перетинає відрізки AB і AC у внутрішніх точках. Обґрунтувати, що тоді пряма l не може перетинати відрізка BC.

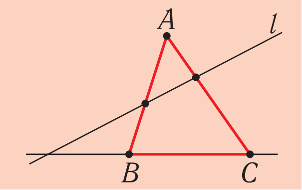


Рис. 1.25

Розв’язання. Звернімо увагу на півплощини, на які пряма l розбиває площину. Оскільки відрізок AB перетинає пряму l, то точки A і B лежать у різних півплощинах. Так само у різних півплощинах лежать точки A і C. Тоді виходить, що точки B і C лежать в одній півплощині — у тій, яка не містить точки A. Якщо ж кінці відрізка BC лежать в одній півплощині, то сам цей відрізок не перетинає граничної прямої l. Обґрунтування завершене.

Вправи і задачі

16°. На прямій позначено точки M, P, N, Q (рис. 1.26). Які із цих точок лежать між точками:
а) M і Q; б) M і N; в) P і Q; г) N і Q?
Чи є серед цих чотирьох точок такі три, які лежать з одного боку від четвертої? Назвіть такі пари точок, які лежать по різні боки від точки P.

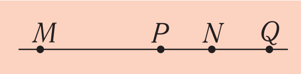


Рис. 1.26

17°. Проведіть пряму і позначте на ній дві точки A і B. Потім позначте кілька точок, які:
1) належать відрізку AB;
2) належать променю AB, але не належать відрізку AB;
3) належать променю BA, але не належать променю BA;
4) не належать ні променю AB, ні променю BA.

18°. На прямій l точки L і M лежать по різні боки від точки K. Чи може точка M лежати між точками K і L? Як розміщені точки K і M відносно точки L?

19°. Точки E і F лежать на прямій по один бік від точки D. Яка із цих точок, і чому, не може лежати між двома іншими?

20°. На прямій точка C лежить між точками A і B. Чи є взаємно доповняльними такі промені: а) AB і BA; б) AB і CB; в) BA і BC; г) CA і CB; ґ) BA і CB?

21. Які із зображених на рис. 1.27 променів a, b, c, d, e перетинають відрізок AB?

22. На прямій позначено три точки X, Y і Z, причому точки X і Z лежать по один бік від точки Y, а точки Y і Z — по один бік від точки X. Котра із цих трьох точок лежить між двома іншими?

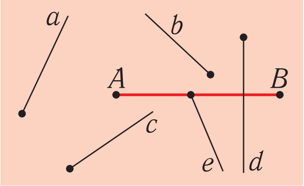


Рис. 1.27

23. Точка M лежить на промені LN, а точка L — на промені NM. Котра із трьох точок L, M, N лежить між двома іншими?

24. Чи можуть два промені однієї прямої не бути взаємно доповняльними?

25. Чи можуть два промені мати єдину спільну точку і при цьому не бути взаємно доповняльними?

26. Обґрунтуйте, що коли точка X належить відрізку AB, то вона належить і променю AB. Чи істинне обернене твердження: якщо точка X належить променю AB, то вона обов'язково належить і відрізку AB?

27. Дано пряму і три точки L, M, N, що не лежать на цій прямій. Відомо, що відрізок LM перетинає пряму, а відрізок LN не перетинає її. Чи перетинає пряму відрізок MN? Обґрунтуйте свою відповідь.

28. Проведіть пряму і позначте дві точки в одній півплощині відносно цієї прямої і три точки в іншій. Проведіть ті відрізки з кінцями у позначених точках, які перетинають проведену пряму. Скільки вийшло відрізків? Чи залежить ця відповідь від конкретного розміщення позначених точок?

29. Проведено пряму і позначено чотири точки A, B, C, D, що не лежать на ній. Чи перетинатиме відрізок AD пряму, якщо:
а) AB, BC і CD перетинають пряму;
б) відрізки AC і BC перетинають пряму, а відрізок BD не перетинає;
в) відрізки AB і CD перетинають пряму, а відрізок BC не перетинає;
г) відрізки AB і CD не перетинають пряму, а відрізок BC перетинає;
ґ) відрізки AB, BC і CD не перетинають пряму;
д) відрізки AC, BC і BD перетинають пряму?
Кожний випадок проілюструйте рисунком.

30•. Перелічіть і зобразіть на рисунках усі можливі випадки взаємного розміщення двох променів на одній прямій.

31•. Скільки всього відрізків визначається чотирма точками, позначеними на одній прямій?

32•. На прямій позначено три точки A, B, C. Скільки різних позначень для променів можна утворити за допомогою літер A, B, C? Скільки серед відповідних променів буде різних? Як зміниться відповідь на друге запитання, якщо точки A, B, C не лежатимуть на одній прямій?

33•. Точки A, B, C, D не лежать на одній прямій. Відомо, що пряма AB перетинає відрізок CD, а пряма CD перетинає відрізок AB. Обґрунтуйте, що відрізки AB і CD перетинаються.

34•. Відомо, що відрізки AB і CD перетинаються. Обґрунтуйте, що тоді відрізки AC і BD за жодних умов не можуть перетинатися.

§3. Вимірювання і відкладання відрізків

Уроки 4–5

Видатний учений-хімік і метролог Д.І. Менделєєв (1834–1907) любив повторювати, що справжня наука починається тоді, коли починають вимірювати.

Вимірювання у геометрії розпочинається з вимірювання відрізків.

Якщо розглядати цю проблему з вузькопрактичної точки зору, то її вирішення спряжене з двома неабиякими труднощами. Перша трудність полягає у запровадженні єдиної одиниці вимірювання (еталона довжини), а друга — у забезпеченні належної точності самого вимірювання. Дещо про це можна довідатися з історичного нарису, вміщеного у кінці цього параграфа. Однак у геометрії від цих суто практичних аспектів абстрагуються, вважаючи, що єдина одиниця вимірювання (наприклад, метр, дециметр, сантиметр тощо) уже запроваджена і що можливе абсолютно точне вимірювання, навіть якщо для цього потрібні не тільки десяті, а й соті, тисячні і так далі частини основного еталона.

Одним із найпоширеніших інструментів для вимірювання довжин є лінійка з нанесеною на її край сантиметровою і міліметровою шкалою. Незважаючи на простоту, лінійка дає змогу наочно проілюструвати ті властивості вимірювання та відкладання відрізків, які для геометрії є основними.

Д.І. Менделєєв у мантії професора Единбурзького університету.
Портрет Іллі Рєпіна
(1885 р.)

На рис. 1.28, а) зображено вимірювання відрізків AB і AC, довжини яких менші від довжини лінійки: $AB = 5$ см; $AC = 7$ см 2 мм = = 7,2 см.

На рис. 1.28, б) зображено вимірювання відрізка AB, довжина якого більша за довжину лінійки. Цей відрізок розбивається на два відрізки AM і MB, потім довжина кожної частини вимірюється окремо, а результати підсумовуються: $AB = AM + MB =$ = 10 см + 2 см = 12 см.

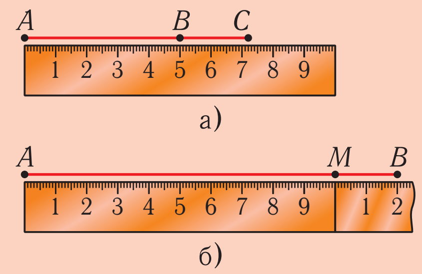


Рис. 1.28

Отже, маємо таку *основну властивість вимірювання відрізків*:

кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.

Довжину відрізка називають також *відстанню* між його кінцями. На рис. 1.28, а) відстань між точками A і C дорівнює 7,2 см, а на рис. 1.28, б) відстань між точками A і B дорівнює 12 см.

Означення.

Відрізки, які мають однакову довжину, називаються *рівними*.

На рис. 1.29 зображено два рівних відрізки AB і CD. За допомогою лінійки легко переконатися, що кожен із них має довжину 3 см.

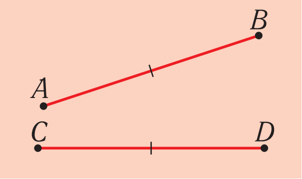


Рис. 1.29

Рівність відрізків записується за допомогою звичайного знака рівності, наприклад: $AB = CD$.

На рисунках рівні відрізки часто позначають однаковою кількістю рисочок.

Означення.

Точка, яка ділить відрізок на дві рівні частини, називається *серединою* відрізка.

На рис. 1.30 відрізки AM і MB рівні між собою, отже, точка M — середина відрізка AB.

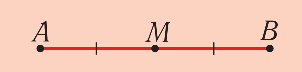


Рис. 1.30

У геометрії, а також і в практиці, часто доводиться відкладати відрізки, які мають певну довжину.

На рис. 1.31 показано, як на промені l від його початку O за допомогою лінійки відкласти відрізок OA завдовжки 4,5 см.

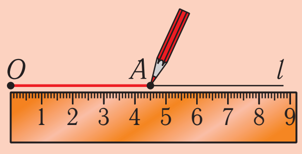
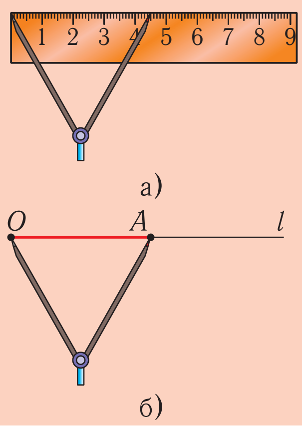


Рис. 1.31

Відрізки можна відкладати й за допомогою інших засобів. Наприклад, якщо використовувати лінійку і циркуль, то спочатку з використанням лінійки фіксується відповідний розхил циркуля (рис. 1.32, а), а вже потім цей розхил «переноситься» на промінь (рис. 1.32, б). Звісно, від вибраного способу відкладання результат не залежить.



а)

б)

Рис. 1.32

Отже, справджується така *основна властивість відкладання відрізків*:

на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, і притому — тільки один.

Відзначимо два важливих наслідки з основних властивостей вимірювання і відкладання відрізків.

1. Нехай маємо два рівних відрізки AB і CD (рис. 1.33). Рівність цих відрізків означає, що встановлено їхні довжини і вони виявилися рівними. Візьмемо тоді промінь l з початком C, який містить відрізок CD. Відрізок CD буде відкладеним на цьому промені. Якщо ж ми відкладемо від точки C ще й відрізок AB, то дістанемо той самий відрізок CD, оскільки відрізок з такою довжиною можна відкласти лише один. У результаті відрізок AB немовби суміститься з відрізком CD.

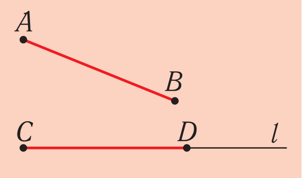


Рис. 1.33

Отже, ***якщо відрізки рівні, то їх можна сумістити***.

2. Нехай тепер маємо два нерівних відрізки AB і CD, і нехай довжина відрізка CD більша за довжину

відрізка AB (рис. 1.34). Якщо ми так само, як у попередньому випадку, відкладемо на промені CD відрізок CB', рівний за довжиною відрізку AB, то точка B' неодмінно буде внутрішньою точкою відрізка CD. Справді, збігатися з точкою D вона не може, бо для цього відрізки AB і CD мають бути рівними. Якби ж точка B' розмістилася ззовні відрізка CD, то тоді відрізок CB' дорівнював би сумі відрізків CD і DB' і тому мав би довжину, більшу за довжину відрізка CD, а отже, й за довжину відрізка AB, що неможливо.

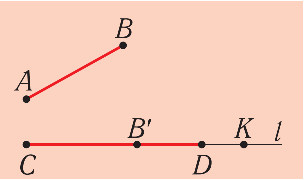


Рис. 1.34

Отже, ***якщо нерівні відрізки відкласти на одному й тому самому промені від його початку, то відрізок з меншою довжиною буде частиною відрізка з більшою довжиною***.

Відповідно до цього, якщо довжина відрізка CD більша за довжину відрізка AB, то кажуть, що й сам відрізок CD більший за відрізок AB, і записують: $CD > AB$. Тоді ж відрізок AB уважається меншим від відрізка CD, і це записується так: $AB < CD$.

Розв’язуємо разом

Задача.

Чи можуть точки A, B, C лежати на одній прямій, якщо $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см?

Розв’язання. Якщо три точки X, Y, Z лежать на одній прямій, то одна, і тільки одна, з них лежить між двома іншими. Нехай точка Y лежить між точками X і Z (рис. 1.35). Це означає, що точка Y належить відрізку XZ. Тоді, за властивістю вимірювання відрізків,

$$XZ = XY + YZ.$$

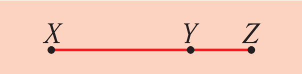


Рис. 1.35

Отже, XZ — найдовший із трьох відрізків XY, YZ і XZ, які попарно сполучають три точки X, Y, Z, і він дорівнює сумі двох інших відрізків.

У нашому випадку найдовшим є відрізок $AC = 10$ см, однак він не дорівнює сумі двох інших відрізків, оскільки $AB + BC = 5 + 7 = 12$ (см). Отже, точки A, B, C не можуть лежати на одній прямій.

Вправи і задачі

35°. Виміряйте і запишіть результати вимірювання для усіх відрізків, зображених на рис. 1.36.

36°. Проведіть у зошиті промінь з початком у точці O, а потім відкладіть на ньому відрізки $OA = 6$ см і $OB = 2{,}8$ см. Чому дорівнює довжина відрізка BA? Визначте її двома способами.

37°. Проведіть промінь AX, відкладіть на ньому відрізок AB завдовжки 4 см і за допомогою лінійки визначте його середину C. Потім побудуйте такий відрізок AD, щоб точка B була його серединою. Чому дорівнюють довжини відрізків AC і AD?

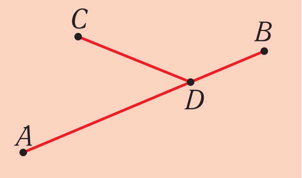


Рис. 1.36

38°. На прямій точка N лежить між точками L і M. Який із відрізків з кінцями у цих точках має найбільшу довжину?

39°. Порівняйте на око довжини відрізків AB і CD на рис. 1.37 та AB і BC на рис. 1.38, а потім перевірте вимірюванням.

Рис. 1.37

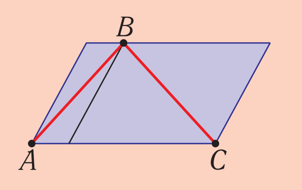


Рис. 1.38

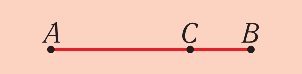


Рис. 1.39

40°. Точка C належить відрізку AB (рис. 1.39). Визначте довжину відрізка:

а) AB, якщо $AC = 4{,}5$ см, $CB = 2{,}7$ см;
б) AC, якщо $CB = 3{,}6$ см, $AB = 9{,}3$ см;
в) CB, якщо $AC = 5{,}1$ см, $AB = 8$ см.

41°. На прямій по різні боки від точки O відкладені відрізки OA = 3 см і OB = 5 см. Чому дорівнює відстань між точками A і B?

42°. Точка O розміщена між точками A і B і віддалена від них на відстань 2,4 см і 3,6 см. Чому дорівнює відстань між точками A і B?

43. Рівні відрізки AB і BC розміщені на одній прямій. Котра із точок A, B, C лежить між двома іншими?

44. Точки A, B, C лежать на одній прямій і відрізок BC більший за відрізок BA. Котра із цих трьох точок може лежати між двома іншими?

45. Чи можуть точки L, M, N лежати на одній прямій, якщо:
а) LM = 3 см, LN = 7 см, MN = 9 см;
б) LM = 3 см, LN = 6 см, MN = 9 см?
Якщо можуть, то зобразіть це на рисунку.

46. Точка C ділить відрізок AB завдовжки 28 см на частини, різниця яких дорівнює 6 см. Визначте довжини відрізків AC і CB.

47. Довжина відрізка дорівнює 28 см. На яких відстанях від кінців відрізка розміщені точки, що ділять його у відношенні 3 : 4?

48. Точка C — середина відрізка AB, а точка D — середина відрізка AC. Визначте довжину відрізка AB, якщо BD = 8 см.

49. Точки B і C належать відрізку AD завдовжки 12 см. Відомо, що AB = 6 см, CD = 8 см. Визначте довжину відрізка BC.

50•. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Визначте довжину відрізка BC, якщо AB = 3,3 см, AC = 4,7 см. Скільки розв'язків має ця задача?

51•. Точка B належить променю OA, причому OB = 10 см, AB = 4 см. Визначте довжину відрізка OA. Розгляньте два випадки.

52•. На промені з початком O позначені точки A, B, C так, що OA = 5 см, AB = 6 см, BC = 3 см. Визначте можливу відстань між точками O і C.

53•. Точки A, B, C, D лежать на одній прямій, і при цьому AB = 13 см, BC = 8 см, CD = 6 см. Визначте найбільшу і найменшу з можливих відстаней між точками A і D.

54•. Точка ділить відрізок на дві частини, відстань між серединами яких дорівнює 5 см. Чому дорівнює довжина відрізка?

55•. Точка C належить відрізку AB. Обґрунтуйте, що відстань між серединами відрізків AC і CB не залежить від розміщення точки C. Чому вона дорівнює, якщо довжина відрізка AB дорівнює 16 см?

56•. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій і мають спільну середину. Обґрунтуйте, що тоді відрізки AC і BD — рівні. Чи можна стверджувати, навпаки, що коли відрізки AB і CD лежать на одній прямій, а відрізки AC і BD рівні, то відрізки AB і CD мають спільну середину?

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Як вимірювали довжини у різні часи

Сучасна людина зазвичай не задумується над тим, що ті численні блага цивілізації, якими вона користується, забезпечені невтомною працею всього людства упродовж віків. Характерним прикладом є вимірювання довжин і відстаней. Хто тепер не знає, що довжини, які сумірні з ростом людини, вимірюють у сантиметрах, більші — у дециметрах і метрах, великі відстані — у кілометрах, а маленькі проміжки — у міліметрах? Хто не знає, що між цими одиницями існують дуже прості співвідношення, які виражаються множенням чи діленням на степінь числа 10? Нарешті, хто не знає, що для проведення самих вимірювань використовуються прості прилади — лінійки, стрічки, складні метри, рулетки тощо? І кожна людина, в якій би частині світу не проживала, узявши один із таких приладів, може легко перевірити вказані будь-де розміри або закласти потрібні розміри у виріб, який збирається виготовляти. Але так було не завжди. Більшу частину своєї історії людство не мало загальноприйнятих мір.

Вимірювання сучасною рулеткою

1. Перші еталони — в людині

Першими мірами довжини, природно, служили частини людського тіла — найчастіше рук і ніг.

Ще давні єгиптяни, вавилоняни та інші народи застосовували таку міру, як *лікоть*, що дорівнювала відстані від ліктя до кінця розпрямленого середнього пальця руки. Ліктями, зокрема, дуже зручно вимірювати мотузки та відрізи тканини. Повний оберт тканини довкола ліктя називався *подвійним ліктем*. Ця міра теж застосовувалася у багатьох народів.

Міра лікоть

Лікоть не мав сталої величини. У різних державах і в різні часи застосовувалися різні лікті. Навіть в одній державі в один час могли існувати різні лікті.

Найдовшим зазвичай був царський лікоть, який застосовувався при зборі податі.

У руській державі міра, аналогічна ліктю, називалася *аршином*. Відомий російський історик і письменник М.М. Карамзін (1766–1826) уважав, що ця назва була запозичена внаслідок торгівлі зі східними народами. Зокрема, у персів лікоть називався «арші». Недобросовісні купці часто по-своєму тлумачили цю міру. Звідси бере свій початок відомий вислів «міряти на свій аршин», що означає «по-своєму підходити до справи, пильнувати свої інтереси».

Дрібнішими відліктя та аршина мірами довжини були: *долоня* (наприклад, в юдеїв, британців), *кулак* (в арабів) і *п'ядь* (у давніх русичів).

Міра долоня

Долоня — це ширина кисті руки. У класичній англійській літературі часто зустрічаються оповіді про вимірювання висоти коней саме долонями.

Мала п'ядь — це відстань від кінця великого пальця до кінця вказівного, а велика п'ядь — відстань від кінця великого пальця до кінця мізинця при найбільшому можливому їхньому розведенні. П'яді зустрічаються уже в актах XIV ст. Вважалося, що в аршині містяться 4 п'яді. Тому п'ядь часто називалася також чверткою. З п'яддю пов'язаний крилатий вислів: «Берегти кожну п'ядь рідної землі».

Міра палець

Ще дрібнішою мірою довжини був *палець* (наприклад, у вавилонян) і *дюйм* (в англо-саксонських народів). Цілком природно, що долоня дорівнювала 4 пальцям.

Дюйм початково вважався рівним довжині суглоба великого пальця. Про це говорить і сама назва: слово duim голландською мовою якраз і означає «великий палець».

На початку XVII ст. указом російського царя Петра I була встановлена відповідність між традиційними російськими і новими англійськими мірами — «заради кращої узгодженості з європейськими народами у трактатах і контрактах». Відповідно до цього указу, 1 аршин прирівнювався до 28 англійських дюймів.

Іще з часів Київської Русі на українських землях застосовувалася така міра довжини, як *сажень*. Про це, зокрема, свідчить і Нестор-літописець. Слово «сажень» мало первісну форму «сяжень». Тому ймовірно, що воно походило від дієслова «сягати».

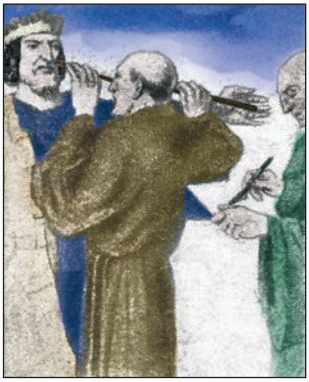
Розрізняли *маховий сажень*, що дорівнював розмаху рук, і *косий сажень*, рівний відстані від п'яти правої ноги до кінців пальців витягнутої вгору лівої руки. Звичайно, косий сажень був більшим від махового. Тому про кремезних чоловіків (зокрема, про казкових героїв) казали, що вони мають «косий сажень у плечах». Інколи таке порівняння можна почути й нині.

У XVII ст. було узаконено, що міра 1 сажень становить 3 аршини, що на нинішній вимір дорівнює 2,13 м. Зокрема, в «Соборному укладі» 1649 року сказано: «А сажень, щоб міряти землю чи щось інше, — робити на три аршини, а більше або менше трьох аршинів сажнів не робити». На відміну від косого та махового сажнів, цей новий сажень називався *царським* або *казенним*.

Найпоширенішою з мір, пов'язаних з ногою людини, є *фут*. Він дорівнює середній довжині ступні дорослої людини (англійське foot якраз і означає «нога», «ступня»). Ця міра теж застосовувалася у різних народів. В Англії фут був узаконений разом із дюймом у XIV ст. королем Едвардом II: 1 фут вважався рівним 12 дюймам, що на нинішній вимір становить 30,48 см. Французький королівський фут (який теж поділявся на 12 дюймів і був у Франції основною мірою довжини аж до введення метра), мав довжину 32,5 см.

Не менш цікаве походження основної міри довжини в англо-саксонських народів — *ярда*. Ця міра була узаконена англійським королем Генріхом I ще у 1101 році. Згідно з легендою, 1 ярд — це відстань від кінчика носа цього короля до кінця середнього пальця його витягнутої руки. Щоправда, за іншою версією прообразом ярда став меч Генріха I. 1 ярд уважається рівним 3 футам. На даний час — це приблизно 91 см.

Міра фут



Міра ярд

2. Еталон — ячмінна зернина

У 1324 р. англійський король Едвард II уточнив величину дюйма. Згідно з королівським указом, 1 дюйм дорівнював «довжині трьох ячмінних зернин, узятих із середньої частини колоска і прикладених одне до одного своїми кінцями». А в англійському побуті ще й досі залишилася мірка «ячмінне зерня», що дорівнює третині дюйма. Цікаво згадати, що улюблена дітьми Дюймовочка — малесенька дівчинка з однойменної казки Андерсена, яка могла жити у квітці і мала зріст 1 дюйм, народилася саме з ячмінної зернини.

У XVI ст. відомий тогочасний учений Христоф Клавій (1537–1612) запропонував уточнити розміри фута за допомогою тих самих ячмінних зернин. Половину фута, за Клавієм, мали визначати 64 зернини, прикладені одна до одної упоперек. Це давало змогу дуже просто відтворювати довжину еталона у будь-якому місці, оскільки товщина ячмінних зернин дуже стабільна (значно стабільніша від їхньої довжини, яку застосовували для визначення дюйма), а велика кількість узятих зернин практично повністю згладжувала індивідуальні відхилення від середньої величини. До того ж, число 64 є степенем двійки. А це давало змогу простим діленням навпіл діставати менші долі фута.

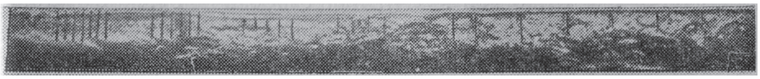
Христоф Клавій (Клавій Шлюссель) (1537—1612) — італійський математик німецького походження. Найбільше відомий як керівник проекту з уведення григоріанського календаря, яким увесь світ користується й понині.

3. Час як відстань

Принципово інші способи застосовувалися для встановлення одиниць вимірювання великих відстаней. Вони пов'язувалися з урахуванням часу на їхнє подолання. Наприклад, такою була міра довжини *стадій*. Уважається, що ця міра виникла у Давньому Вавилоні. Достеменно відомо, що стадіями вимірювали відстані давні греки. Зокрема, від цього слова утворилося сучасне слово «стадіон».

Античний стадіон у Дельфах (Греція). Довжина його бігової доріжки, відзначеної з обох боків кам'яними лініями, дорівнює 177,5 м. Вочевидь, таким і був «стадій» у цьому місті в колишні часи.

За переказами, стадій дорівнював відстані, яку доросла людина проходить розміреним кроком за проміжок часу від появи першого сонячного променя при сході сонця до того моменту, коли весь сонячний диск повністю зійде над горизонтом. Оскільки добре



Давньовавилонська лінійка (бл. 2000 р. до н. е.). Оскільки ця лінійка є фрагментом напівзруйнованої статуї царя Гудея, то можна вважати, що нею визначалася половина давньовавилонського царського ліктя. Лінійка поділена на 16 рівних частин, із яких друга у свою чергу поділена на 6, четверта — на 5 рівних частин, шоста — на 4, восьма — на 3, а дев'ята — на 2 рівні частини.

відомо, що схід сонця триває 2 хв, то, враховуючи середню швидкість пішохода, легко дійти висновку, що величина стадія перебувала в межах від 160 до 195 метрів.

Відомо, що вавилоняни ділили свій стадій на 360 ліктів. А оскільки лікоть у них приблизно дорівнював 54 см, то звідси неважко вивести, що довжина вавилонського стадія становила приблизно 194 м.

На основі аналогічних міркувань з'ясовано, що римський стадій мав довжину 185 м, а грецький олімпійський — 192 м.

Ідея з використанням часових проміжків для встановлення міри довжини дістала несподіваний розвиток у XVII ст. У результаті фізичних експериментів з маятником (важливим елементом маятникового годинника, який якраз тоді був винайдений) з'ясувалося, що період коливання маятника залежить від його довжини. На основі цього самим винахідником маятникового годинника голландським математиком і механіком Християном Гюйґенсом (1629–1695) у 1664 році було запропоновано за одиницю вимірювання відстаней довжину такого маятника, період коливання якого становить 1 секунду. А італійський природодослідник, винахідник і мандрівник Тіто Бураттіні (1617–1681) у 1675 році запропонував і назву для цієї нової одиниці — метр, утворивши її від грецького слова «метрео», тобто «вимірюю».

Проте невдовзі несподівано з'ясувалося, що період коливання маятника залежить не тільки від його довжини, а й від географічної широти місця, де проводиться вимірювання. Зокрема, поблизу екватора і в середніх широтах ці величини суттєво відрізняються

Христіан Гюйгенс

Фронтиспіс до трактату Тіто Бураттіні «Універсальна міра» (Misura Universale) (1675 р.)

одна від одної. Виявивши цей недолік, помітили й інший, а саме, що при реалізації цієї ідеї одиниця вимірювання довжини «прив'язувалася» до одиниці вимірювання часу. А це в теоретичному аспекті значно гірше, ніж аби ці величини визначалися незалежно одна від одної. Тому, незважаючи на оригінальність ідеї, від неї відмовилися, залишивши лише на майбутнє назву «метр» для одиниці вимірювання довжин.

4. Універсальним мірилом оголошено Землю

У 1670 році французький дослідник Мутон висунув ще більш захоплюючу ідею — пов'язати одиницю вимірювання довжин з розмірами всієї матінки-Землі, точніше, з довжиною її меридіана. Але для реалізації цієї сміливої, а по суті глибоко філософської та гуманістичної ідеї, потрібні були особливі суспільно-політичні умови. Вони з'явилися лише через сотню літ у зв'язку з революційними подіями у Франції наприкінці XVIII ст. Лише революційний рух, який охопив тоді цю країну, дав змогу організувати відповідні великомасштабні вимірювання, а найголовніше — стимулював перехід на нову систему мір. В усіх інших консервативніших країнах цей перехід затягнувся більше, як на століття, а в деяких не реалізований повною мірою й досі.

Характерним у цьому зв'язку є звернення французького уряду до населення 1790 р. В ньому, зокрема, мовилося:

«Як можуть друзі рівності миритися з розмаїттям і незручністю мір, які зберігають ще пам'ять про ганебне феодальне рабство..., у той час, як вони клялися знищити саму назву тиранії, якою б вона не була?.. Для створення істинно філософської системи мір, яка була б достойною віку просвітництва, не можна взяти нічого, що не ґрунтувалося б на твердих підвалинах, що не пов'язано найтіснішим чином з предметами незмінними, нічого, що в подальшому могло б залежати від людей і від подій. Потрібно звернутися до самої природи і взяти основу системи мір із її надр ...».

Пам'ятник **«Глобус»** (він же й знак нульового кілометра) у Києві (2001 р.)

5. Як же зміряли Землю?

У березні 1791 року Національні збори Франції затвердили пропозицію Академії наук, що виходила від найвидатніших тогочасних учених Лапласа, Лагранжа, Монжа, Лавуазьє та ін., — про спорядження спеціальної експедиції для вимірювання земного меридіана. Було вирішено виміряти довжину паризького меридіана між двома містами, розміщеними на ньому, — Дюнкерком (приморським містом на півночі Франції) і Барселоною (іспанським містом на березі Середземного моря). Знаючи географічні широти цих міст, потім було легко обчислити й довжину всього меридіана. Винятково сприятливою обставиною було те, що обидва вибрані міста знаходилися на рівні моря, оскільки це суттєво спрощувало вимірювання й підвищувало їхню точність. Керівниками експедиції було призначено академіків Жана Батіста Деламбра (1749 – 1822) і П'єра Мешена (1744 – 1804).

Вимірювальні роботи експедиції та відповідні розрахунки тривали декілька років. На відстані близько 1 000 км між Дюнкерком і Барселоною за допомогою провішування було побудовано й виміряно 115 трикутників, розміщених уздовж меридіана. Шукана величина була знайдена обчисленням і підсумовуванням довжин відрізків меридіана, розміщених усередині кожного трикутника. Для цього застосовувалися співвідношення, які існують між кутами і сторонами трикутника (ви вивчатимете їх у 9 класі). З особливою точністю вимірювалася лише одна сторона крайнього трикутника — так звана база. А в усіх решти трикутниках за допомогою кутомірних приладів вимірювалися лише кути — що значно простіше, ніж вимірювання відстаней. За допомогою формул, які пов'язують сторони й кути трикутника, крок за кроком, починаючи від першого трикутника, обчислювалися сторони всіх інших трикутників, а потім і відрізки меридіана, розміщені всередині них.

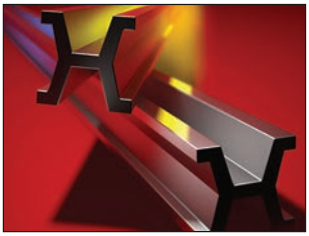
Встановивши довжину паризького меридіана у старих французьких мірах (туазах і футах; 1 туаз дорівнював 6 футам), було вирішено за основу нової

Зала Кассіні у Паризькій обсерваторії з лінією нульового меридіана (названа на честь астронома Джованні Кассіні (1625–1712), який понад 40 років був директором цієї обсерваторії). Уздовж лінії меридіана — карта вимірювальних робіт експедиції Деламбра і Мешена.

Загальна схема вимірювання довжини паризького меридіана міри — метра — взяти $\frac{1}{40\ 000\ 000}$ від знайденої величини. У старих французьких мірах це становило 3 фути і 11,44 лінії (1 лінія = $\frac{1}{12}$ фута).

6. Еталон створено

Перший еталон метра було виготовлено у 1799 році. Але навіть у Франції повний перехід на нову систему вимірювання відбувся лише у 1840 р. А міжнародною мірою метр став у 1872 р. після відповідного рішення спеціально скликаної у Парижі меридіанної конференції. Тоді ж було затверджено міжнародний еталон метра, який було виготовлено зі сплаву платини (90%) та іридію (10%). Еталон має форму стержня завдовжки 102 см із двома мітками на відстанях 1 см від кінців. Відстань між цими мітками якраз і уособлює довжину 1 м. Поперечний переріз еталона нагадує літеру Х. Саме така форма забезпечує йому найбільшу міцність при найменшій вазі (останнє дуже важливо, оскільки платина, яка домінує у сплаві, дорожча навіть за золото).


Міжнародний еталон метра

§4. Кути та їхнє вимірювання

Коли у побуті говорять про кут, наприклад, у кімнаті, на майданчику, на ділянці, між вулицями тощо, то мають на увазі фігуру, утворену двома відрізками-сторонами. На рис. 1.40 дужкою позначений один із кутів у парку. У геометрії теж використовується схоже поняття про кут, коли, наприклад, говорять про кути трикутника. Однак у застосуваннях геометрії, наприклад, при складанні планів місцевості з допомогою візування, доводиться розглядати і кути з як завгодно продовженими сторонами, тобто утвореними променями. Промені містять у собі й відрізки, однак жоден відрізок не вмістить променя. Тому аби можна було користуватися як одним, так і іншим уявленням про кут, приймається таке його означення.

Уроки 6–7

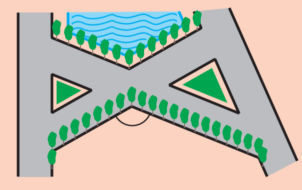


Рис. 1.40

Означення.

***Кутом* називається фігура, що складається із двох променів, які мають спільний початок. При цьому кожен із променів називається *стороною* кута, а їхній спільний початок — *вершиною* кута.**

Кут позначають або його вершиною, або сторонами, або вершиною і ще двома точками, взятими на кожній зі сторін. Саме слово «кут» часто замінюють значком $\angle$.

На рис. 1.41 зображений кут з вершиною O і сторонами OA, OB, які також позначені як a і b. Позначити цей кут можна одним із таких способів: $\angle O$, $\angle AOB$, $\angle ab$ або $\angle(ab)$. При цьому позначення у формі $\angle O$ застосовується лише у тому разі, коли при вершині O не розглядається інших кутів. Звернімо також увагу, що у позначенні $\angle AOB$ *вершина кута розміщується між точками, взятими на сторонах*.

Інколи для спрощення рисунків кути позначають цифрами. Наприклад, на рис. 1.42 при вершині O зображено три кути: $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$.

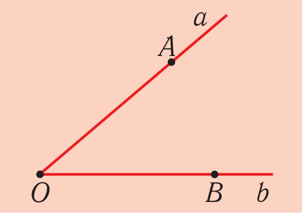


Рис. 1.41

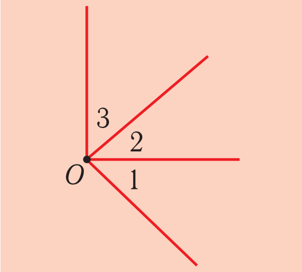


Рис. 1.42

Рис. 1.43

Означення.

Якщо сторони кута є взаємно доповняльними променями, тобто утворюють пряму, то такий кут називається *розгорнутим*.

На рис. 1.43 зображено розгорнутий кут O зі сторонами a і b. Фактично — це пряма, з виокремленою на ній точкою, яка вважається вершиною розгорнутого кута.

Означення.

Кажуть, що **промінь з початком у вершині нерозгорнутого кута проходить *між* його *сторонами*, якщо він перетинає який-небудь відрізок з кінцями на сторонах кута.**

На рис. 1.44 зображено промінь c, який проходить між сторонами a і b нерозгорнутого кута O: він перетинає відрізок AB з кінцями на сторонах кута у точці C.

У задачі, розв'язаній далі на с. 42–43, доводиться, що коли промінь c перетинає який-небудь відрізок AB з кінцями на сторонах кута O, то він перетинає й будь-який інший такий відрізок LM. А це означає, що прийняте означення не залежить від вибору відрізка AB.

Для розгорнутого кута вважається, що будь-який промінь c, який виходить з вершини кута O, лежить *між* його сторонами a і b (рис. 1.45).

Кажуть, що *промінь, який проходить між сторонами кута, розбиває його на два кути*. На рис. 1.44 і 1.45 промінь c розбиває кут $\angle ab$ на два кути: $\angle ac$ і $\angle cb$.

Точки усіх променів, які проходять між сторонами нерозгорнутого кута, називаються *внутрішніми* точками цього кута. Усі інші точки площини називаються *зовнішніми*. На рис. 1.46 синім кольором позначені внутрішні точки нерозгорнутих кутів A і B; решта точок — зовнішні.

Для розгорнутого кута O внутрішніми вважаються всі точки однієї з півплощин, граничну пряму якої утворюють сторони кута, а зовнішніми — точки іншої півплощини (рис. 1.47).

Отже, будь-який кут розбиває площину на дві частини. Та частина, яка містить сторони кута і всі його внутрішні точки, називається *опуклим плоским кутом*, а та, що містить сторони кута і всі зовнішні точки, — *увігнутим плоским кутом*.

У трикутниках, які вивчатимуться далі, усі плоскі кути опуклі (рис. 1.48), однак уже в чотирикутниках, які вивчатимуться у 8 класі, можуть бути й увігнуті кути (рис. 1.49).

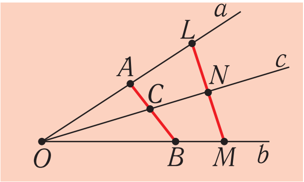


Рис. 1.44

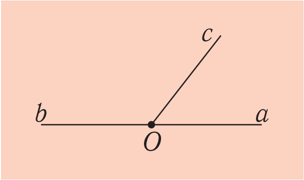


Рис. 1.45

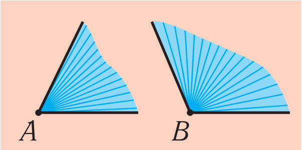


Рис. 1.46

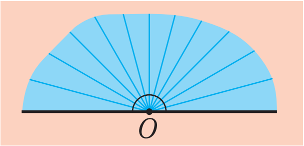


Рис. 1.47

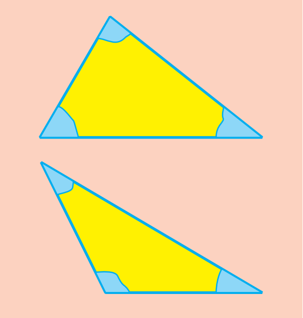


Рис. 1.48

Кути вимірюють у *градусах* (gradus — латинською мовою «крок»). Градуси позначають кружечком °, який записують зверху біля відповідного числа. Якщо, наприклад, кут A має градусну міру 60°, то це записується так: $\angle A = 60°$.

Кутом з градусною мірою 1° уважається $\dfrac{1}{180}$ частина розгорнутого кута. Якщо між сторонами розгорнутого кута провести півколо з центром у вершині кута і поділити його на 180 рівних частинок, то промені, які виходять із центра півкола і проходять через сусідні точки поділу, утворюють кути по 1° (рис. 1.50). Звісно, що в такому разі сам розгорнутий кут дорівнює 180°.

На цьому влаштований найпростіший прилад для вимірювання кутів — транспортир, застосування якого зрозуміле з рис. 1.51, а). Тут $\angle ac = 70°$, $\angle cb = 45°$, $\angle ab = 115°$. Зауважте, що промінь c проходить між сторонами кута $\angle ab$ і при цьому $\angle ab$ дорівнює сумі кутів $\angle ac$ і $\angle cb$.

Усе це ілюструє таку *основну властивість вимірювання кутів*.

Кожний кут має певну градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Зазначимо, що у практичних застосуваннях геометрії, наприклад, в астрономії та геодезії, використовуються й дрібніші від градуса одиниці вимірювання кутів. Це — *мінута* (minuta — дослівно «менша») і *секунда* (secunda — дослівно «друга», тобто друга менша одиниця). Одна мінута (позначається 1′) дорівнює $\dfrac{1}{60}$ частині градуса, а одна секунда (позна-

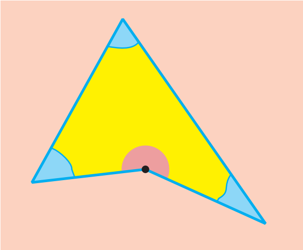


Рис. 1.49

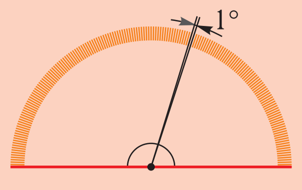
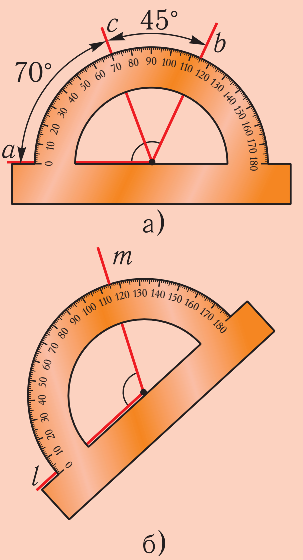


Рис. 1.50



а)

б)

Рис. 1.51

чається 1″) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині мінути, тобто $\frac{1}{3600}$ частині градуса. У надточних астрономічних вимірюваннях застосовуються навіть *терції* (tertia — означає «третя»). Одна терція (позначається 1‴) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині секунди. Вимірювання з такою величезною точністю здійснюється шляхом візування з використанням телескопів і дуже точних механізмів для їхнього наведення.

Назва приладу «транспортир» походить від латинського слова transportare, що означає «переносити». Це вказує на те, що цей прилад застосовується не тільки для вимірювання, а й для перенесення (відкладання) кутів.

На рис. 1.51, б) від променя l в одну з півплощин за допомогою транспортира відкладено кут $\angle lm$, що дорівнює куту $\angle ab$. Це ілюструє таку основну властивість відкладання кутів.

Від будь-якого променя у задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і притому — тільки один.

Незважаючи на очевидну схожість між вимірюванням і відкладанням кутів та вимірюванням і відкладання відрізків, між ними існують суттєві відмінності. По-перше, для кутів існує абсолютний і незмінний еталон — розгорнутий кут, тимчасом як для відрізків еталон можна вибирати довільно: це може бути метр, фут, сажень, лікоть тощо. (Згадайте відомий анімаційний фільм «38 папуг», герої якого вимірювали довжину удава і папугами, і мавпами, і навіть слониками.) По-друге, для кутів існує найбільша можлива величина — 180°, а для відрізків найбільшої величини не існує.

Вимірювання кутів у градусах застосовували ще античні астрономи, тимчасом, як метричні одиниці

Старовинні латунні транспортири.
Вгорі. Транспортир, виготовлений у Німеччині близько 1700 р. (на лінійковій основі — орнамент у стилі бароко). Вражає його схожість із сучасним «шкільним» транспортиром.
Внизу. Транспортир знаменитої англійської фірми точних інструментів Negretti & Zambra з поворотним кронштейном (XIX ст.)

для вимірювання відрізків набули повсюдного поширення лише з 2-ї половини XIX ст.

Означення.

Кути, які мають однакові градусні міри, називаються *рівними*.

Рівність кутів записується за допомогою звичайного знака рівності. На рисунках рівні відрізки часто позначають однаковою кількістю дужок біля вершин. Наприклад, на рис. 1.52 за допомогою двох дужок позначено, що $\angle O = \angle Q$.

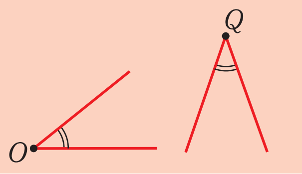


Рис. 1.52

Як і для відрізків, можливість відкладання кутів із заданою градусною мірою забезпечує можливість суміщення рівних кутів і порівняння кутів, які не є рівними. А саме, аналогічно як для відрізків, можна довести такі твердження:

1. ***Якщо кути рівні, то їх можна сумістити.***

2. ***Якщо нерівні кути відкласти від одного й того самого променя в одну й ту саму півплощину,*** *то* ***кут з меншою градусною мірою буде частиною кута з більшою градусною мірою, а тому меншим від нього.***

Нерівності між кутами позначають за допомогою тих самих знаків > та <, що й нерівності між відповідними їм градусними мірами, наприклад, $\angle A > \angle B$.

Означення.

Півпряма, яка виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут на дві рівні частини, називається *бісектрисою* кута.

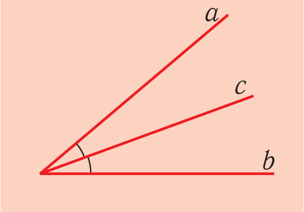


Рис. 1.53

Слово «бісектриса» походить від латинського bissectrix, що означає «розтинаюча навпіл».

На рис. 1.53 півпряма c — бісектриса кута $\angle ab$. Вона ділить цей кут на два рівних кути $\angle ac$ і $\angle cb$, що мають спільну сторону c.

На рис. 1.54 півпряма c — бісектриса розгорнутого кута $\angle ab$. Оскільки розгорнутий кут має градусну міру 180°, то кути $\angle ac$ і $\angle cb$ дорівнюють по 90°.

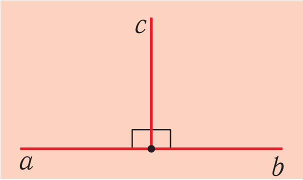


Рис. 1.54

Означення.

Кут, який дорівнює 90°, називається *прямим*.

Прямі кути на рисунках часто відзначають значком ⌉.

Для креслення прямих кутів, окрім транспортира, застосовується *косинець* (рис. 1.55). Професійні креслярі використовують *рейсшину* — інструмент, що складається із двох лінійок різної довжини, скріплених у формі літери Т (рис. 1.56).

Рис. 1.55

Рис. 1.56

За своєю величиною прямі кути займають проміжне становище між *гострими* й *тупими* кутами.

Означення.

Кут, величина якого менша від 90°, називається *гострим*, а кут, величина якого більша за 90°, але менша від 180°, називається *тупим*.

На рис. 1.57 зображено усі три види нерозгорнутих кутів, залежно від їхньої величини — гострий, прямий і тупий.

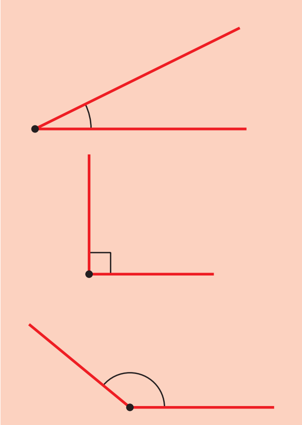


Рис. 1.57

Розв'язуємо разом

Задача.

Обґрунтувати, що прийняте на с. 37 означення променя, який проходить *між* сторонами кута, не залежить від вибору відрізка з кінцями на сторонах кута. Тобто, якщо промінь c, що виходить з вершини кута O, перетинає якийсь відрізок AB з кінцями на сторонах a, b кута, то він перетинає і будь-який інший такий відрізок LM (рис. 1.58).

Розв'язання. Проведемо відрізок BL і обґрунтуємо, що промінь c його перетинає. Точки A і L лежать з одного боку від прямої c, оскільки відрізок AL її не перетинає. Точки A і B лежать по різні боки від прямої c, оскільки відрізок AB її перетинає. Точка L лежить з того самого боку, що й точка A, отже, по різні боки з точкою B, а тому відрізок BL перетинає пряму c у деякій точці D.

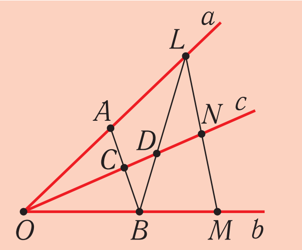


Рис. 1.58

Чи може точка D належати не променю c, а доповняльному до нього променю? Не може, оскільки доповняльний промінь міститься по інший бік від прямої b, ніж відрізок BL. Отже, відрізок BL перетинає саме промінь c.

Так само, як щойно розглянуто відрізки AB і BL, розглянемо відрізки BL і LM. Оскільки уже відомо, що промінь c перетинає відрізок BL, то так само виведемо, що він перетинає і відрізок LM. Обґрунтування завершено.

Вправи і задачі

57°. Позначте три точки, що не лежать на одній прямій, і накресліть усі кути з вершинами у кожній з цих точок, сторони яких проходять через дві інші точки. Скільки всього кутів буде побудовано? Як зміниться відповідь, якщо точки лежатимуть на одній прямій?

58°. Виміряйте за допомогою транспортира кути A, B, C, D, зображені на рис. 1.59, і на цій підставі вкажіть, котрі з цих кутів гості, котрі — тупі, а котрі, можливо, — прямі.

59°. Проведіть промінь OA і за допомогою транспортира відкладіть від нього у різні півплощини кути $\angle AOB = 55°$ і $\angle AOC = 75°$. Визначте градусну міру кута BOC. Як зміниться результат, якщо кути AOB і AOC відкласти в одну півплощину? Обґрунтуйте свої відповіді.

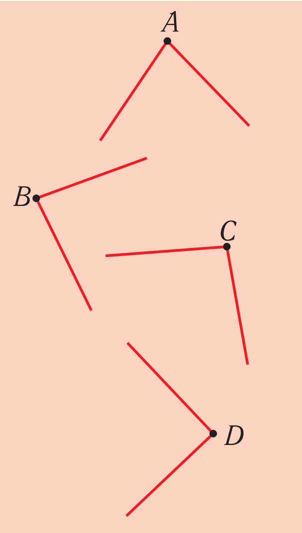


Рис. 1.59

60°. За допомогою транспортира накресліть кути з градусними мірами 30°, 60° і 120°, а потім проведіть їхні бісектриси. Утвориться ціла низка нових кутів. Чи будуть серед «старих» і нових кутів рівні?

61°. Скільки різних кутів утворюють чотири промені a, b, c, d, що виходять зі спільного початку (рис. 1.60). Запишіть позначення цих кутів.

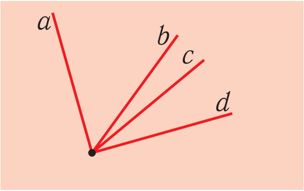


Рис. 1.60

62°. Чи є промінь a бісектрисою кута AOB у випадках, зображених на рис. 1.61, а)–в)?

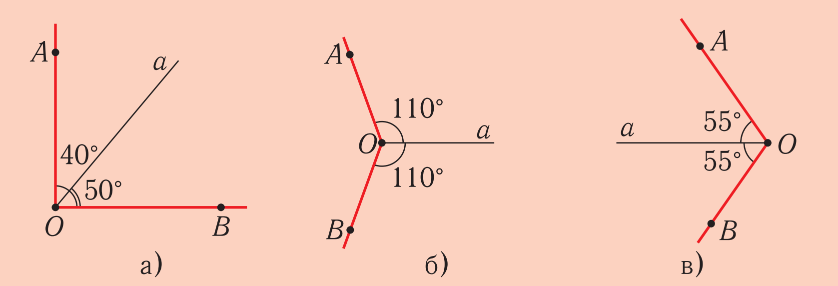


Рис. 1.61

63°. Визначте кути, які утворюють хвилинна і годинна стрілки годинника у кожний момент часу, коли годинник показує цілу кількість годин. Чи є серед цих кутів рівні?

64°. Чи може сума градусних мір двох гострих кутів бути: а) більшою; б) меншою; в) рівною градусній мірі прямого кута?

65°. Чи може кут між бісектрисою і стороною кута бути: а) тупим; б) прямим?

66. Чи істинні такі твердження:
а) кут, який менший від прямого, — гострий, а кут, який більший за прямий, — тупий;
б) будь-який кут, який менший від тупого, — гострий;
в) будь-який кут, який менший від розгорнутого, — тупий;
г) різниця двох тупих кутів менша від прямого кута?

67. Промінь c проходить між сторонами кута $\angle ab$. Визначте:
а) $\angle ab$, якщо $\angle ac = 32°$, $\angle bc = 74°$;
б) $\angle ac$, якщо $\angle ab = 138°$, $\angle bc = 61°$;
в) $\angle bc$, якщо $\angle ab = 90°$, $\angle ac = 39°$.

68. Чи може промінь c проходити між сторонами кута $\angle ab$, якщо:
а) $\angle ac = 30°$, $\angle bc = 70°$, $\angle ab = 40°$;
б) $\angle ac = 105°$, $\angle cb = 80°$, $\angle ab = 40°$; $\angle ac > \angle ab$?

69. Між сторонами кута $\angle ab$, градусна міра якого дорівнює 60°, проведено промінь c. Визначте кути $\angle ac$ і $\angle bc$, якщо:

а) кут $\angle ac$ на 20° більший за кут $\angle bc$;
б) кут $\angle ac$ утричі менший від кута $\angle bc$;
в) градусні міри кутів $\angle ac$ і $\angle bc$ відносяться, як 3 : 7.

70. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB і при цьому $\angle AOC = 45°$, $\angle COB = 60°$. Проведено промінь OD, для якого $\angle BOD = 15°$. Визначте градусну міру кута AOD. Скільки розв'язків має ця задача?

71. На рис. 1.62 промені a і b — доповняльні, c — довільний інший промінь з тим самим початком, що й у променів a і b. Накресліть такий рисунок у зошиті і проведіть за допомогою транспортира бісектриси кутів $\angle ac$ і $\angle cb$. Потім виміряйте кут між цими бісектрисами. Можливо, результат, який ви дістанете, наштовхне вас на певний загальний висновок?

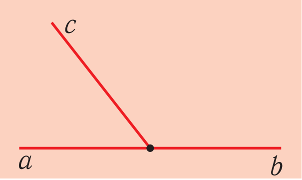


Рис. 1.62

72. У прямому куті між його сторонами проведено довільний промінь, а потім — бісектриси обох кутів, на які цей промінь ділить прямий кут. Чому дорівнює кут між бісектрисами? Як зміниться відповідь, якщо кут буде не прямим, а дорівнюватиме, наприклад, 70° чи 120°? Чи не наштовхують вас ці запитання на певний загальний висновок?

73•. Розгляньте обернену ситуацію до тієї, що описана у попередній задачі. Тобто нехай у якомусь куті O з невідомою градусною мірою проведено промінь між його сторонами, а потім — бісектриси кутів, на які цей промінь розбиває кут O. Нехай кут між бісектрисами має градусну міру $n°$. Чи можна знайти градусну міру кута O?

74•. З деякої точки проведено три промені так, що всі кути, які утворюють будь-які два з них, рівні між собою. Визначте ці кути.

75•. Чи можна з деякої точки провести чотири або п'ять променів так, щоб кути, які утворюють будь-які два із цих променів, були рівними між собою? Якщо можна, то якими будуть ці кути?

76•. У вас є шаблон кута з градусною мірою 75°. Якої величини кути можна накреслити, використовуючи лише цей шаблон?

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Як вимірювали кути у різні часи

Прилади для вимірювання кутів

Транспортир і астролябія. Найдавнішим прообразом транспортира був кутомірний прилад, який використовували астрономи, — астролябія. Транспортир — це половина астролябії.

Вважається, що астролябію винайшов у II ст. до н. е. знаменитий грецький астроном Гіппарх (180–125 до н.е.), а вдосконалив середньовічний німецький астроном та математик Регіомонтан (Йоганн Мюллер) (1436–1476). Цей прилад слугував для визначення положення небесних світил на небесній сфері. Для прикладу, на гравюрі XVI ст., відтвореній на рис. 1.63, відображений один зі способів для визначення горизонтального напрямку на світило, який застосовувався мореплавцями.

Початково астролябію використовували здебільшого для визначення висоти світил над горизонтом. Із цією

Знамениті астрономи **Гіппарх** (з небесним глобусом) і **Птолемей** (із земним глобусом). Деталь фрески Рафаеля «Афінська школа» (1509—1511 рр.)

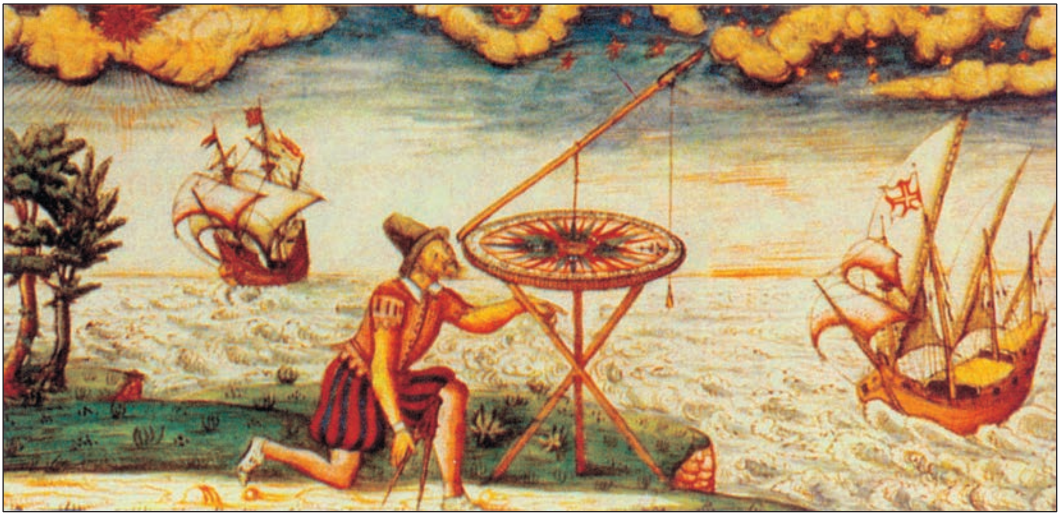


Рис. 1.63

метою її виготовляли у вигляді важкого мідного диска — лімба, який підвішували за кільце у вертикальному положенні (рис. 1.64). По краю лімба наносилася шкала від 0° до 360°. Пряма $ГГ_1$, що сполучала поділки 0° і 180°, займала горизонтальне положення. У центрі лімба кріпилася рухома стрілка $АА_1$ — алідада. На її кінцях розміщувалися перпендикулярні до лімба пластинки з отворами — діоптри.

Для визначення висоти світила над горизонтом спостерігач прикладав око до нижнього діоптра $А$ і повертав алідаду доти, поки світило не було видно одразу через обидва діоптри. Поділка на шкалі, на якій зупинявся край алідади ($А$ чи $А_1$), вказувала на висоту світила над горизонтом у градусах.

Квадранти, секстанти та октанти. Бурхливий розвиток астрономії, який розпочався в Європі з початком епохи Відродження, вимагав значно більшої точності від астрономічних вимірювань, ніж її могли забезпечити давні астролябії. Цього можна було досягти лише за рахунок збільшення лімба. Адже чим більша кругова шкала на його краю, тим більшою буде відстань між сусідніми поділками, а це давало змогу визначати не тільки кількість цілих градусів у куті, а й кількість їхніх частин — мінут і навіть секунд.

Водночас було помічено, що в більшості астрономічних вимірювань фактично використовується не вся кругова шкала астролябії, а лише певна її частина. Тому замість усієї астролябії у збільшеному вигляді виготовляли лише квадранти, секстанти і октанти, тобто відповідно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{8}$ частини астролябії. Спосіб використання квадранта відображено на старовинній гравюрі, відтвореній на рис. 1.65. А на рис. 1.66 зображено поєднання в одному приладі квадранта й астролябії, запропоноване видатним данським астрономом Тихо Браге (1546–1601).

Окрім численних гравюр із зображенням кутомірних інструментів, створених художниками, астрономи ще й у свій спосіб засвідчили свою любов і повагу до цих приладів, назвавши Секстантом одне із сузір'їв у

Регіомонтан
(Йоганн Мюллер)
(1436–1476)

Астролябія Регіомонтана

Рис. 1.64

Ян Гевелій веде спостереження за допомогою квадранта

Рис. 1.65

південній частині неба. Відповідну пропозицію подав видатний польський астроном Ян Гевелій (1611–1687), автор всесвітньовідомого атласу зоряного неба. Історія символічна й повчальна. Для проведення досліджень Гевелій збудував обсерваторію й величезний секстант у своєму місті Ґданську. Але затуркані й настрашені городяни спалили прилад. Тоді Гевелій вирішив «перенести його на небо» й увічнити в назві сузір'я, аби вже ніколи нічия зла рука не могла до нього дотягнутися. Однак на той час якраз не було ще не названого сузір'я, яке б своєю формою нагадувало секстант (принцип, що його дотримувалися при утворенні назв більшості сузір'їв). Тому Гевелій вибрав сузір'я, яке хоч і не нагадувало за своїми контурами секстант, проте знаходилося між сузір'ям Лева (якраз під його лапами) та Гідри і тому мало їхній символічний захист (рис. 1.67).

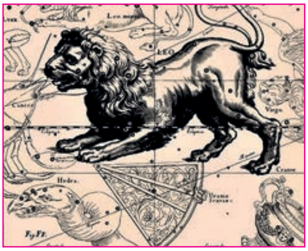
Телескоп і теодоліт. Наступне суттєве удосконалення в конструкцію астролябії вніс французький астроном Жан Пікар (1620–1682) в середині XVII ст. Він замінив діоптри підзорною трубою, винайденою незадовго до цього Ґалілеєм, а для плавного переміщення алідади використав мікрометричний гвинт. Усе це значно підвищувало точність вимірювань і не потребувало використання великих шкал.

Подальші удосконалення астролябії продовжилися у напрямку використання замість підзорної труби найрізноманітніших телескопів. А для проведення наземних (геодезичних) вимірювань було сконструйовано теодоліт (рис. 1.68) (назва утворена від грецьких слів «теомай» — дивитися і «доліхос» — довгий).

Теодоліт має два лімби, розміщені у вертикальній і горизонтальній площинах. Це дає змогу застосовувати цей прилад як для складання планів, так і для проведення нівелювання, тобто визначення відносних висот.

Бусоль. Кути, які застосовуються у морській та повітряній навігації, вимірюють у горизонтальній площині від напрямку на північ проти руху годинникової стрілки від 0° до 360°. Кожен такий кут називається курсом. Прилад, що дає змогу вимірювати курс,

Рис. 1.66



Сузір'я Секстант. Рисунок з атласу Гевелія

Рис. 1.67

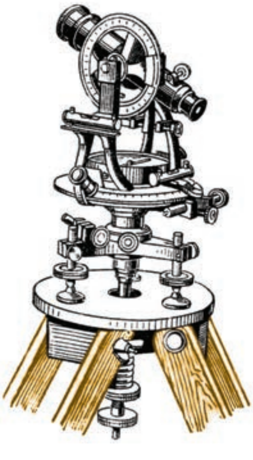


Рис. 1.68

поєднує в собі античну астролябію і компас. Він називається бусоллю (рис. 1.69) («бусоль» — дослівно з французької «компас»). На принципі бусолі конструюється сучасне навігаційне обладнання для морських та повітряних суден.

Як бачимо, звичний нам транспортир має дуже давню історію й водночас утілюється в найсучасніших приладах.

Рис. 1.69

Одиниці для вимірювання кутів

Градуси. Найпоширенішими одиницями для вимірювання кутів є *градуси*. Уже зазначалося, що латинське слово gradus, від якого утворено цю назву, означає «крок», «ступінь», і що величина кута 1 градус (1°) дорівнює $\frac{1}{180}$ частині розгорнутого кута (див. с. 39).

Чим пояснити таку назву і таку величину?

Ще давньовавилонські жерці помітили, що під час рівнодення (тобто коли день і ніч мають однакову тривалість) сонячний диск упродовж свого руху небосхилом (рис. 1.70) укладається в пройденому шляху рівно 2 × 180 разів. А оскільки цей шлях — півколо, то цілком природно було розбивати його на 180 таких подвійних кроків Сонця. Саме ці кроки пізніше й були названі градусами.

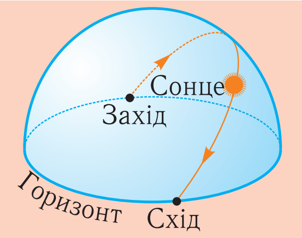


Рис. 1.70

Спостереження за рухом Сонця упродовж дня підтверджувалися й відповідними спостереженнями за його рухом упродовж року. У ті часи вважалося, що рік триває 360 діб. Тому весь річний шлях Сонця небосхилом — так зване зодіакальне коло — теж ділився на 360 подвійних кроків, тобто градусів, а його половина, відповідно, — на 180 градусів.

Нарешті, свій вплив на вибір основи для визначення градуса могло мати й те, що у Давньому Вавилоні застосовувалася шістдесяткова система числення, а число 180 ділиться без остачі на основу 60 цієї системи. Із цим самим пов’язано й ділення градуса на 60 мінут, а мінути — на 60 секунд.

В античну епоху старовинну вавилонську систему перейняли грецькі астрономи, зокрема, найвидатніший з них Клавдій Птолемей (I–II ст. н. е.). Авторитет Птолемея сприяв тому, що ця система набула повсюдного поширення в епоху Відродження, а потім і в пізніші часи. У результаті ми й тепер, як і давні вавилоняни, греки та середньовічні європейці вимірюємо кути у градусах, вважаючи, що розгорнутий кут має саме 180°.

Цікаве походження самого позначення для градусів. Кути з величиною 1° Птоломей називав мойрами, що в перекладі з грецької мови означає «частини». Слово μοιρα він скорочував двома першими літерами, причому другу літеру писав меншою від першої і вгорі — μ°. Пізніше залишилася лише маленька літера °. Це скорочення застосовується й досі.

Клавдій Птолемей.
Старовинна гравюра

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі І

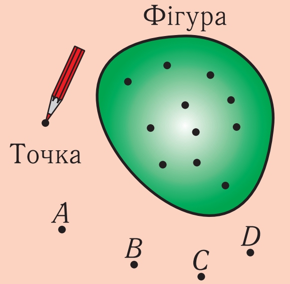
Що вивчається у геометрії

Геометрія — наука про геометричні фігури.

Планіметрія — частина геометрії, в якій вивчаються геометричні фігури, розміщені на площині.

Найелементарнішими фігурами на площині вважаються **точки** і **прямі**. За допомогою них конструюються усі інші плоскі фігури.

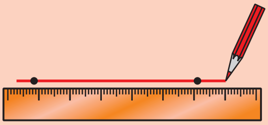
Точки і прямі. Проведення прямої

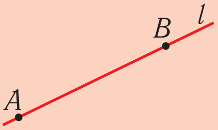


Уявлення про **точку** дає слід на аркуші від тонко загостреного олівця. Вважається, що точка не має розмірів і що на площині існує безліч точок.

У застосуваннях геометрії точками можуть уважатися будь-які реальні об'єкти, розмірами яких за даних умов можна знехтувати.

Точки позначаються великими літерами латинського алфавіту. Наприклад: *A*, *B*, *C*, *D*.





Уявлення про **пряму** дає лінія, проведена під лінійку.

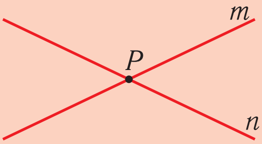
Інші реальні прообрази прямої — натягнуті мотузки, світлові і зорові промені.

На кожній прямій існує безліч точок, однак для проведення прямої достатньо лише двох точок.

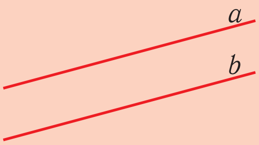
Основна властивість проведення прямої:

через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.

Прямі позначають або двома великими літерами, якими позначені які-небудь дві точки прямої, або однією малою латинською літерою. Наприклад: AB, l.



Про дві прямі m і n, які мають одну спільну точку P, кажуть, що вони ***перетинаються*** у цій точці.



Якщо прямі a і b не мають жодної спільної точки, то вони називаються ***паралельними*** (в дослівному перекладі з грецької — «йдуть поруч»).

Скільки б не продовжувати зображення паралельних прямих, вони ніколи не перетнуться.

Розміщення точок на прямій. Відрізки і промені

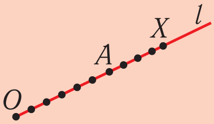
Основна властивість розміщення точок на прямій:

із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

Якщо точка C лежить на прямій l між точками A і B, то кажуть також, що точки A і B лежать *по різні боки* від точки C, або що точки C і B лежать *з одного боку* від точки A, а точки A і C — *з одного боку* від точки B.

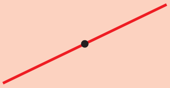
Відрізок — це частина прямої, що складається з усіх точок прямої, які лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки називаються ***кінцями*** відрізка, а всі решта точок називаються ***внутрішніми точками*** відрізка.

Позначають відрізки зазвичай їхніми кінцями. Наприклад: AB.



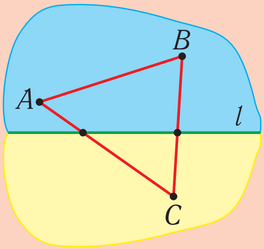
Промінь (або **півпряма**) — це частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать з одного боку від деякої її точки, разом із цією точкою. Ця точка називаються ***початком*** променя, а всі решта точок називаються *внутрішніми точками* променя.

Позначають промені або двома великими літерами, з яких перша вказує на початок променя, а друга — на яку-небудь внутрішню точку, або однією малою літерою. Наприклад: OA, OX, l.



Два промені однієї прямої зі спільним початком називаються ***доповняльними*** (або ***взаємно доповняльними***).

Розміщення точок на площині відносно прямої. Півплощини

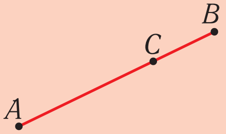


Основна властивість розміщення точок на площині відносно прямої:

кожна пряма розбиває площину на дві півплощини.

Це розбиття має таку властивість: кожен відрізок AB, що сполучає точки однієї півплощини, не перетинає *граничної прямої* l, а кожен відрізок AC, що сполучає точки різних півплощин, перетинає її.

Вимірювання і відкладання відрізків. Рівність відрізків

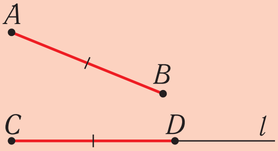


$AB=AC+CB$

Основна властивість вимірювання відрізків:

кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.

Відрізки AB і CD, які мають однакову довжину, називаються ***рівними***.



$CD=AB$

Основна властивість відкладання відрізків:

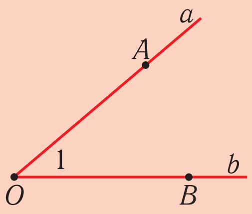
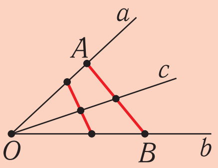
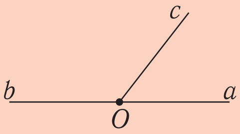
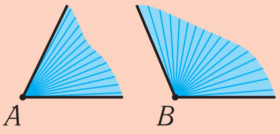
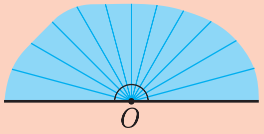
на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, і притому — тільки один

З основних властивостей вимірювання і відкладання відрізків випливає, що ***рівні відрізки можна сумістити***.

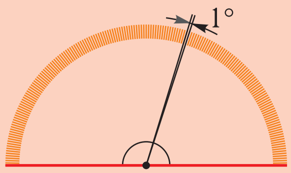
$AM=MB$

Точка M, яка ділить відрізок AB на дві рівні частини, називається ***серединою*** відрізка AB.

Кути

	**Кут** — це фігура, що складається з двох променів, які мають спільний початок. При цьому кожен із променів називається ***стороною*** кута, а їхній спільний початок — ***вершиною*** кута. Якщо *O* — вершина кута, *OA* і *OB* — його сторони, то позначити цей кут можна так: $\angle O$ або $\angle AOB$. Якщо сторони кута позначені через *a* і *b*, то кут позначають у формі $\angle ab$ або $\angle(ab)$. Інколи кути позначають цифрами. Наприклад, $\angle 1$.
	Якщо сторони *a*, *b* кута *O* є взаємно доповняльними променями, то такий кут називається ***розгорнутим***.
	Промінь *c* з початком у вершині *O* нерозгорнутого кута проходить ***між його сторонами** a, b*, якщо він перетинає який-небудь відрізок *AB* з кінцями на сторонах кута. Можна обґрунтувати, що промінь, який лежить між сторонами нерозгорнутого кута, перетинає усі відрізки з кінцями на його сторонах.
	Для розгорнутого кута $\angle ab$ уважається, що будь-який промінь *c*, який виходить з вершини кута *O*, лежить між його сторонами *a* і *b*.
 	Точки усіх променів, які проходять між сторонами нерозгорнутого кута, називаються *внутрішніми* точками цього кута. Решта точок площини називаються *зовнішніми* точками кута. Для розгорнутого кута *внутрішніми* уважаються всі точки однієї з півплощин, граничну пряму якої утворюють сторони кута. Кожен кут розбиває площину на дві частини. Та частина, яка містить сторони кута і всі внутрішні точки кута, називається ***опуклим плоским*** кутом, а та, що містить сторони кута і всі зовнішні точки, — ***увігнутим плоским кутом***.

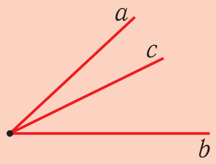
Вимірювання і відкладання кутів. Рівність кутів



Кути вимірюють у градусах, зокрема — за допомогою транспортира. Кутом з градусною мірою 1° уважається $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута.

Дрібнішими одиницями для вимірювання кутів є мінута і секунда Одна ***мінута*** $(1')$ дорівнює $\frac{1}{60}$ частині градуса, одна ***секунда*** $(1'')$ дорівнює $\frac{1}{60}$ частині мінути.

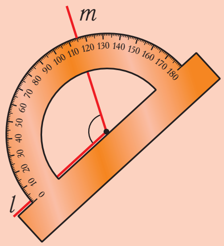
$\angle ab = 180°$



$\angle ab = \angle ac + \angle cb$

Основна властивість вимірювання кутів:

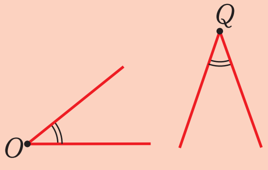
кожний кут має певну градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.



Основна властивість відкладання кутів:

від будь-якого променя у задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і притому — тільки один.

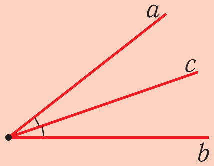
На рисунку від променя l відкладено кут $\angle lm$, що дорівнює 115°.



$\angle O = \angle Q$

Кути, які мають однакові градусні міри, називаються ***рівними***.

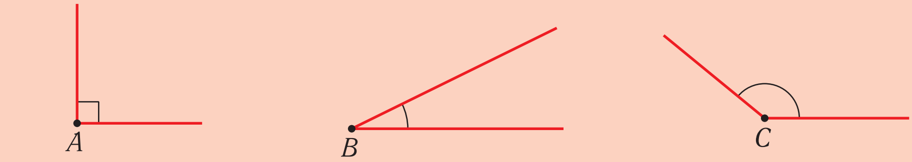
З основних властивостей вимірювання і відкладання кутів випливає, що ***рівні кути можна сумістити***.



$\angle ac = \angle cb$

Промінь c, який виходить з вершини кута $\angle ab$, проходить між його сторонами і ділить кут на два рівних кути, називається ***бісектрисою*** кута $\angle ab$.

Види кутів



$\angle A = 90°$ — прямий $\angle B < 90°$ — гострий $\angle C > 90°$ — тупий

Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називається ***прямим***.

Кут, градусна міра якого менша від 90°, називається ***гострим***, а кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називається ***тупим***.

Перевір себе

1. Що вивчає геометрія? Що таке геометрична фігура? Назвіть відомі вам приклади геометричних фігур.
2. Які геометричні фігури вважаються основними на площині? Як вони зображуються і позначаються?
3. Сформулюйте основну властивість проведення прямої.
4. Яким може бути взаємне розміщення двох прямих на площині?
5. Сформулюйте основну властивість розміщення точок на прямій.
6. Дайте означення відрізка. Як позначаються відрізки?
7. Що таке промінь (півпряма)? Як позначаються промені?
8. Які промені називаються доповняльними?
9. Сформулюйте основну властивість розміщення точок на площині.
10. Що означає вислів: «Пряма розбиває площину на дві півплощини»?
11. Сформулюйте основну властивість вимірювання відрізків. Які відрізки називаються рівними? Як записується рівність відрізків?
12. Що таке відстань між двома точками?
13. Що таке середина відрізка?
14. Сформулюйте основну властивість відкладання відрізків.
15. Обґрунтуйте, що коли відрізки рівні, то їх можна сумістити.
16. Дайте означення кута. Як позначаються кути?
17. Який кут називається розгорнутим?
18. Поясніть, що означає вислів: «Промінь проходить між сторонами кута».
19. Що таке плоский кут? Які плоскі кути називаються опуклими, які — увігнутими?
20. В яких одиницях вимірюються кути?
21. Сформулюйте основні властивості вимірювання та відкладання кутів.
22. Які кути називаються рівними?
23. Як можна обґрунтувати, що коли кути рівні, то їх можна сумістити?
24. Що таке бісектриса кута?
25. Які кути називаються прямими, які — гострими, які — тупими?

Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу І

1°. а) На рис. 1.71 знайдіть усі прямі, які проходять через точку D, але не проходять через точку B. Випишіть усі можливі позначення для них.
б) На рис. 1.71 знайдіть усі прямі, які проходять через точку O, але не проходять через точку C. Випишіть усі можливі позначення для них.

2°. а) За рис. 1.72 випишіть усі промені, які перетинають відрізок AB, але не перетинають відрізок CD.
б) За рис. 1.72 випишіть усі промені, які перетинають відрізок CD, але не перетинають відрізок AB.

3°. а) За рис. 1.73 випишіть позначення трьома буквами усіх кутів із вершиною Q.
б) За рис. 1.73 випишіть позначення трьома буквами усіх кутів із вершиною P.

4°. а) Які із тверджень стосовно співвідношення між довжинами відрізків на рис. 1.74, а) є істинними:
1) $MN = PQ$; 2) $MN > PQ$; 3) $NP > NQ$; 4) $NQ = NP + PQ$; 5) $MN + PN + PQ = MQ$?
б) Які із тверджень стосовно співвідношення між величинами кутів на рис. 1.74, б) є істинними:
1) $\angle bd > \angle ad$; 2) $\angle bd > \angle ac$; 3) $\angle ab < \angle ac + \angle bd$; 4) $\angle ab = \angle ad + \angle db$; 5) $\angle ab = 180°$?

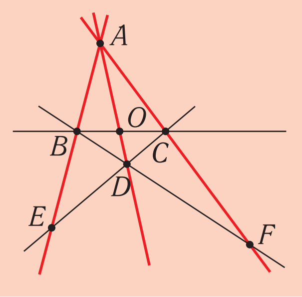


Рис. 1.71

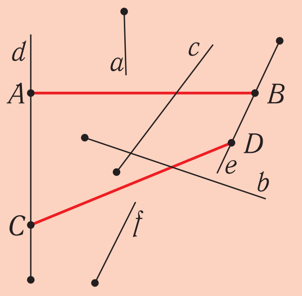


Рис. 1.72

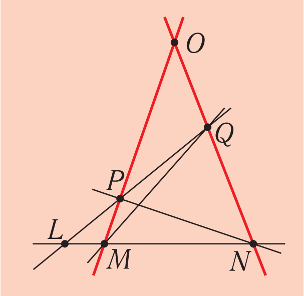


Рис. 1.73

5. а) На промені OA позначено точку C. Відомо, що OA = 8 см, а відрізок AC більший за відрізок OA на 3 см. З’ясуйте, котра з точок O, A, C лежить між двома іншими та знайдіть довжину відрізка OC.

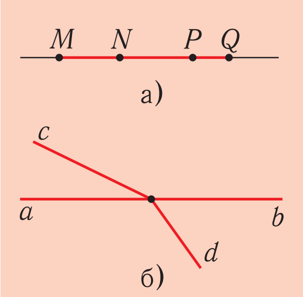


Рис. 1.74

б) На промені OK позначено точку P. Відомо, що OP = 3 см, а відрізок PK удвічі більший за OP. З'ясуйте, котра з точок O, K, P лежить між двома іншими та знайдіть довжину відрізка OK.

6. а) Точка A належить відрізку PQ. Відрізок PA утричі довший за відрізок AQ. Визначте довжини відрізків PA і PQ, якщо PQ = 12 см.

б) Точка P лежить на прямій AB і при цьому точка B розміщена між точками A і P. Відомо, що відрізок AB удвічі менший від відрізка BP. Визначте довжину відрізка BP, якщо AP = 15 см.

7. а) З вершини розгорнутого кута POQ проведені у різні боки від прямої PQ промені OA і OB так, що $\angle POA = 75°$, $\angle\ QOB = 125°$. Визначте кут AOB.

б) З вершини розгорнутого кута AOB проведені у різні боки від прямої AB промені OK і OM так, що $\angle KOB = 100°$, $\angle\ MOA = 125°$. Визначте кут KOM.

8. а) Промінь OA проходить між сторонами кута MON, що дорівнює 95°. Кут MOA на 25° більший за кут AON. Визначте кути MOA і AON.

б) Промінь OP проходить між сторонами кута AOB, що дорівнює 72°. Кут AOP утричі більший за кут BOP. Визначте кути AOP і BOP.

9. а) На відрізку AB завдовжки 12 см позначені точки P і Q так, що AP = 7 см, PQ = 3 см. Визначте довжину відрізка QB.

б) Всередині кута $\angle ab$, що дорівнює 130°, проведено промені c і d так, що $\angle ac = 60°$, $\angle cd = 20°$. Визначте величину кута $\angle bd$.

10. а) Промені OB і OC проходять усередині кута AOD і $\angle AOC = \angle DOB$. Обґрунтуйте, що тоді $\angle AOB = \angle DOC$.

б) Промені OB і OC не проходять усередині кута AOD і $\angle AOC = \angle DOB$. Обґрунтуйте, що тоді $\angle AOB = \angle DOC$.

11•. а) На прямій послідовно позначені точки O, P, A, B так, що OP = 2 см, PA = = 6 см, OB = 14 см. Визначте відстань між серединами відрізків OA і PB.

б) На прямій послідовно відкладені відрізки AB, BC і CD так, що $AB : BC = 2 : 3$, AD = 15 см, CD = 5 см. Визначте відстань між серединами відрізків AB і CD.

12•. а) Точки A, B, C лежать на одній прямій, і при цьому AB = 10 см, BC = 12 см. Яка із цих точок не може лежати між двома іншими?

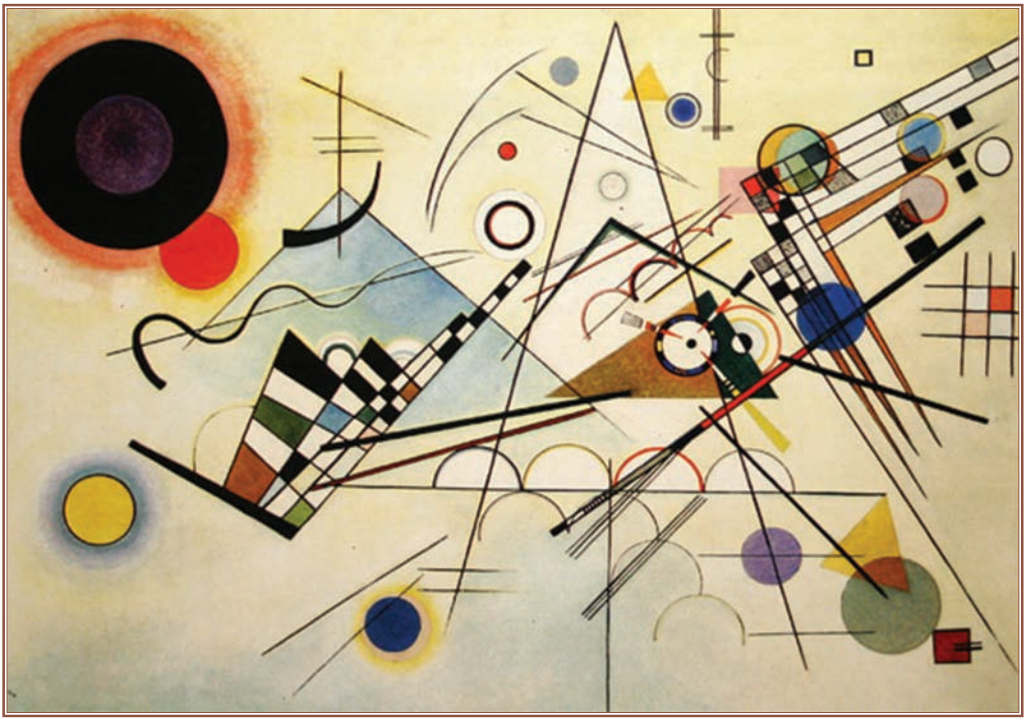
б) Точки A, B, C лежать на одній прямій, і при цьому AB = 8 см, BC = 3 см. Яка із цих точок не може лежати між двома іншими?

13•. а) OB — бісектриса кута AOC, промінь OD проходить між його сторонами. Відомо, що $\angle AOD = 80°$, $\angle COD = 20°$. Визначте кут BOD.

б) OB — бісектриса кута AOC, промінь OD не проходить між його сторонами. Відомо, що $\angle AOD = 140°$, $\angle COD = 60°$. Визначте кут BOD.

14•. а) Промінь, проведений з вершини прямого кута, ділить цей кут на два менші кути. Обґрунтуйте, що кут між бісектрисами цих кутів дорівнює 45°.

б) Промінь, проведений з вершини кута O, ділить цей кут на два кути. Кут між бісектрисами утворених менших кутів дорівнює 45°. Обґрунтуйте, що кут O — прямий.



Василь Кандинський (1866–1944).
Композиція номер VIII (1923 р.).

У цій усесвітньо відомій картині один із засновників живописного абстракціонізму відобразив своє сприйняття геометричних кодів Всесвіту. Приводом стало спостереження сонячного затемнення. Найважливішими формоутворюючими елементами у кодах Всесвіту, як уважав В. Кандинський, є прямі лінії і кола. Прямі ми детально вивчатимемо у цьому розділі, кола — в останньому розділі.

Розділ II

Взаємне розміщення прямих на площині

Вступ

Уроки 8–10

«Той, хто добре вивчив пряму, не матиме труднощів з геометрією», — часто повторював своїм учням у знаменитій Політехнічній школі в Парижі відомий французький математик і громадський діяч Гаспар Монж (1746–1818).

На попередніх уроках ви розпочали ґрунтовне вивчення прямої. Перші факти, з якими ви ознайомилися, стосувалися саме цієї фігури. То були основні властивості про проведення прямої, про розміщення точок на прямій і про розміщення точок на площині відносно прямої. Отже, йшлося про властивості окремо взятої прямої. Наступним кроком має бути дослідження взаємного розміщення двох прямих. Цьому й присвячуватиметься цей розділ.

Однак перш, ніж безпосередньо перейти до розгляду цих питань, нам потрібно зробити декілька вкрай важливих для подальшого зауважень. При цьому ми будемо посилатися і на той невеликий досвід вивчення геометрії, який ви вже маєте.

Пам'ятник Гаспару Монжу у містечку Боні (Бургундія), в якому він народився. Відомий скульптор Франсуа Рюд увічнив великого ученого в образі професора Політехнічної школи під час лекції з геометрії.

Про аксіоми, теореми і доведення у геометрії

На попередніх уроках ви не могли не помітити, що при виборі основних положень для фундаменту геометрії ми постійно вдавалися до певних логічних обґрунтувань. Наприклад, важливість основних властивостей прямої пояснювали тим, що ці властивості могли б і не виконуватися, якби геометрія будувалася не для земного, а для якогось іншого світу, наприклад, для невеличкої кулястої планети Маленького Принца або для планети у формі бублика. Що ж до деяких наслідків, то ми виводили їх з основних положень винятково логічними міркуваннями, навіть якщо й без того вони начебто не викликали сумнівів. Наприклад, у §1 обґрунтовувалося, що дві прямі не можуть мати більше однієї спільної точки, а в §4 — що рівні відрізки можна сумістити.

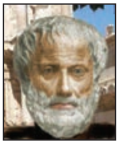
У цьому — вся суть геометрії: геометрія — теоретична наука, в якій усі факти виводяться логічним шляхом (за допомогою міркувань) з певного переліку основних положень. Ці основні положення називаються ще **аксіомами** геометрії. У дослівному перекладі з грецької слово «аксіома» означає «повага» «авторитет», а в математиці вживається у значенні незаперечної істини, підстави для логічних виведень.

Усі зазначені в попередньому розділі основні властивості найпростіших геометричних фігур є *аксіомами геометрії*. Аби чіткіше уявляти собі цей фундамент геометрії, перелічимо їх тут ще раз.

I. Аксіома проведення прямої. ***Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.***

II. Аксіома розміщення точок на прямій. ***Із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.***

Усі доказові науки застосовують аксіоми. Аксіоми мають найвищий ступінь загальності, а тому є початком усього.



Аристотель (кінець 4-го — початок 3-го ст. до н. е) — один із найвидатніших учених-природодослідників і філософів усіх часів. Портрет-реконструкція з античного бюсту.

III. Аксіома розміщення точок на площині відносно прямої. ***Кожна пряма розбиває площину на дві півплощини, що мають спільну граничну пряму.***

IV. Аксіома вимірювання відрізків. ***При вибраній одиниці вимірювання кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.***

V. Аксіома відкладання відрізків. ***При вибраній одиниці вимірювання на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, і притому — тільки один.***

VI. Аксіома вимірювання кутів. ***Кожний кут має певну градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.***

VII. Аксіома відкладання кутів. ***Від будь-якого променя у задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і притому — тільки один.***

Це ще не повний перелік аксіом геометрії. Згодом буде уведено ще дві важливі аксіоми — аксіому *про паралельні прямі* (§9) і аксіому *про рухомість трикутника* (§14). Сукупність усіх аксіом геометрії називається її *аксіоматикою*.

Евклід

Д. Гільберт

Як засвідчила історія, виокремлення вичерпного і при тому не переобтяженого надмірною кількістю переліку аксіом — не така легка річ, як може здатися на перший погляд. Перший перелік аксіом геометрії запропонував давньогрецький учений Евклід ще у III ст. до н.е. Хоча цей перелік і був неповним, однак він прослужив науці аж до кінця XIX ст. У 1899 р. видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943) опублікував книгу «Основи геометрії», в якій запропонував повний перелік із 20 аксіом геометрії. Аксіоматика Гільберта задовольняла найприскіпливіші вимоги учених, однак була занадто абстрактною і тому складною для початкового вивчення геометрії. Тому в шкільному навчанні ще тривалий час послуговувалися неповним переліком Евкліда.

Оригінальну аксіоматику геометрії на основі поняття руху запропонував на початку XX ст. професор Одеського університету Веніамін Федорович Каган (1869–1953), однак і цей варіант виявився складним для шкільних підручників.


В.Ф. Каган

Спеціально орієнтовану на школярів, модернізовану аксіоматику геометрії запропонував на початку 1930-х років американський математик Джордж Біркгоф (1884–1944). В її основу він поклав аксіоми вимірювання й відкладання відрізків та кутів, які ще називають *аксіомами лінійки і транспортира*. А унікальний синтез ідей Евкліда, Гільберта, Кагана і Біркгофа здійснив видатний геометр XX ст. Олексій Васильович Погорєлов (1919–2002), який майже все життя працював у Харківському університеті та Харківському науково-дослідному інституті низьких температур. Аксіоматика Погорєлова була реалізована в його підручнику з геометрії, який з'явився на початку 1970-х років, а потім понад чверть століття служив нашій школі. Нині більшість вітчизняних спеціалістів вважає цю аксіоматику найбільш придатною для шкільного навчання, і тому саме вона подається у цьому підручнику.


Дж. Біркгоф


О.В. Погорєлов

Після уведення аксіоматики подальший виклад геометрії відбувається шляхом послідовного виведення (частіше кажуть — *доведення*) логічних наслідків. Ці логічні наслідки називаються **теоремами**.

Слово «теорема» — грецьке. Воно походить від слова «теорео», що означає «уважно розглядаю», «придивляюся», і має той самий корінь, що й значно поширеніше тепер слово «теорія».

А ще слово «теорема» має значення «вистава», яке близьке до сучасного «шоу». В античні часи у Греції були поширені інтелектуальні розваги у формі публічних диспутів, під час яких їхні учасники обстоювати (доводили) свої твердження або навіть цілі теорії. Ці міні-вистави, які зараз назвали б інтелектуальними «шоу», теж називалися «теоремами».

Отже, стежачи за доведенням теореми на класній дошці або знайомлячись з ним за підручником, ви можете уявляти себе присутніми на інтелектуальному шоу і навіть брати у ньому участь. Сподіваємося, що такий погляд на теореми і їхнє доведення позбавить вас деякого остраху, який на початках можуть викликати ці слова.

Вас не повинно непокоїти й те, що в окремих теоремах, особливо на початках, будуть доводитися немовби «очевидні» речі, які нібито й без доведення видно з рисунка. Не піддавайтесь на цю оману! Скільки б ви не нарисували рисунків, ви все одно ніколи не вичерпаєте усіх можливих варіантів для розмірів та розміщення деталей (наприклад, ви не нарисуєте трикутник з кілометровими сторонами, а ми вже бачили на прикладі сфери, що відхилення від «очевидного» на ній проявляються якраз у великих масштабах). А тому ви ніколи не зможете лише з рисунка з певністю зробити загального висновку. Тільки правильне логічне міркування (доведення) з посиланням на аксіоми або на вже доведені раніше теореми може дати для цього підставу. Рисунок може лише допомогти у доведенні, наприклад, наштовхнути на правильні міркування, однак замінити його він не може.

Математичне доведення — це логіка, яка сприяє правильному формуванню розуму, розвиває його здібності, посилює їх настільки, що розум привчається мислити точно і завжди відрізняти істину від хибності, навіть у речах нематематичних. Саме тому єгиптяни, перси і лакедемоняни, як свідчать джерела, рідко вибирали собі правителя, який не був трохи обізнаним з математикою, вважаючи, що необізнаний з математикою зовсім не вміє мислити, а тому неспроможний правити й керувати.

Бенджамін Франклін (1706–1780) — видатний американський учений-фізик, просвітитель і державний діяч, один із засновників США.
Портрет Франкліна перед бюстом Ньютона створив з натури англійський художник Девід Мартін у 1767 р. Експонується в Білому Домі у Вашингтоні.

§5. Суміжні кути

При перетині двох прямих утворюється чотири нерозгорнутих кути (рис. 2.1). Взаємне розміщення прямих характеризують за допомогою цих кутів. Яких саме? — Це ми зрозуміємо після того, як уважніше придивимося до них. Для цього розглядатимемо їх парами. Одні пари кутів називаються *суміжними*, інші — *вертикальними*. Суміжні кути ми вивчатимемо у цьому параграфі, вертикальні — в наступному.

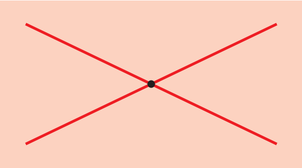


Рис. 2.1

Означення.

Два кути називаються *суміжними*, якщо вони мають одну спільну сторону, а дві інші їхні сторони є доповняльними променями.

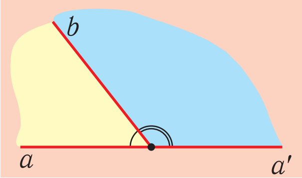


Рис. 2.2

Побудувати суміжні кути можна так. Візьмемо який-небудь кут $\angle ab$ (рис. 2.2) і проведемо промінь a', що є доповняльним до променя a. Кути $\angle ab$ і $\angle ba'$ — суміжні: у них сторона b спільна, а сторони a і a' є доповняльними променями.

Кут, суміжний з кутом $\angle ab$, дістанемо й тоді, якщо проведемо промінь b', доповняльний до променя b (рис. 2.3).

Отже, для кожного кута $\angle ab$ можна побудувати два суміжних з ним кути $\angle ba'$ і $\angle ab'$.

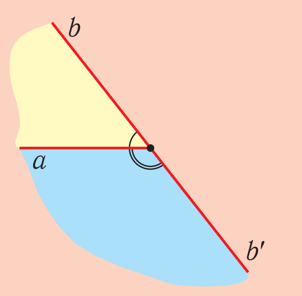


Рис. 2.3

Теорема

(про суму суміжних кутів).

***Сума суміжних кутів дорівнює* 180°.**

Доведення. Нехай кути $\angle ab$ і $\angle ba'$ — суміжні, і в них сторона b — спільна, а сторони a і a' є доповняльними променями (див. рис. 2.2). Тоді промінь b проходить між сторонами розгорнутого кута зі сторонами a і a'. Відповідно до аксіоми про вимірювання кутів, сума кутів $\angle ab$ і $\angle ba'$ дорівнює розгорнутому куту $\angle aa'$, тобто має градусну міру 180°. Теорему доведено.

Твердження, яке безпосередньо випливає з теореми, називається *наслідком*.

З теореми про суму суміжних кутів маємо такі наслідки.

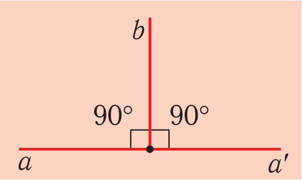


Рис. 2.4

Наслідок 1.

Кут, суміжний з прямим кутом, є прямим.

Наслідок 2.

Кут, суміжний з гострим кутом, — тупий, а кут, суміжний з тупим кутом, — гострий.

Справді, якщо кут $\angle ab$ — прямий (рис. 2.4), то він дорівнює 90°. Тому суміжний з ним кут $\angle ba'$, за теоремою про суму суміжних кутів, дорівнює $180^\circ - 90^\circ$, тобто теж 90°. Отже, він є прямим.

Нехай тепер $\angle ab$ — гострий (див. рис. 2.2). Це означає, що його градусна міра менша від 90°. У сумі зі своїм суміжним кутом $\angle ab'$ він дає 180°. Отже, цей суміжний кут має градусну міру, яка більша за 90°, тобто є тупим.

Випадок, коли $\angle ab$ — тупий, розглядається аналогічно.

Для мене знайти доведення математичної теореми — дорожче, ніж завойовувати усе перське царство.

Демокрит — видатний давньогрецький мислитель, засновник атомізму. Жив на межі 5-го і 4-го століть до н. е.

Портрет «Демокрит, що сміється» створив з уяви нідерландський художник Хендрик Тербрюгген у 1628 р.

Розв’язуємо разом

Задача.

Один із суміжних кутів на 60° менший від іншого. Визначити градусні міри цих кутів і накреслити їх.

Розв’язання. Позначимо через x градусну міру більшого із кутів. Тоді градусна міра меншого кута дорівнюватиме $x - 60^\circ$. Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180°, то звідси маємо рівняння:

$$x + x - 60^\circ = 180^\circ.$$

Звідси $2x = 240^\circ$, а $x = 120^\circ$. Отже, більший із кутів дорівнює 120°, а менший — $120^\circ - 60^\circ$, тобто 60°. На рис. 2.5 відображено побудову цих кутів за допомогою транспортира.

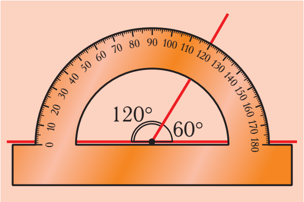


Рис. 2.5

Вправи і задачі

77°. На кожному з рис. 2.6, а)–в) укажіть пари суміжних кутів.

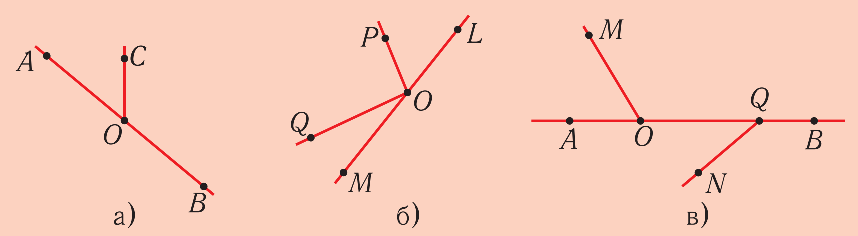


Рис. 2.6

78°. Чи є кути 1, 2, зображені на рис. 2. 7, а)–г), суміжними?

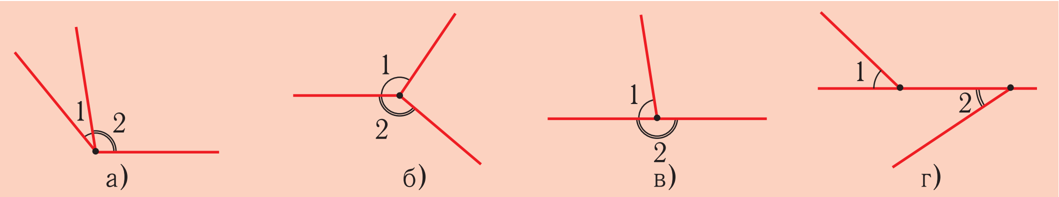


Рис. 2.7

79°. Назвіть усі пари суміжних кутів, що утворюються прямими AB і CD, які перетинаються в точці O (рис. 2.8).

80°. Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона проходила вздовж ліній у вашому зошиті. Укажіть два принципово різні варіанти.

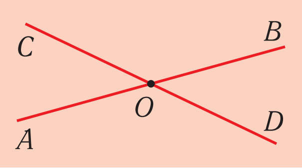


Рис. 2.8

81°. Знайдіть невідомий кут, якщо суміжний з ним дорівнює:
а) 67°; б) 138°; в) 90°; г) 45° 25′.

82°. Чи можуть у парі суміжних кутів бути:
а) обидва кути гострими;
б) обидва кути тупими;
в) обидва кути прямими;
г) один кут гострий, а інший — прямий;
ґ) один кут тупий, а інший — прямий;
д) один кут тупий, а інший — гострий?

83°. Чому при складанні аркуша паперу вдвоє, коли суміщаються краї, одержуються прямі кути?

84. При перетині двох прямих утворилися чотири кути (рис. 2.9). Визначте кути 2, 3 і 4, якщо кут $\angle 3 = 36°$.

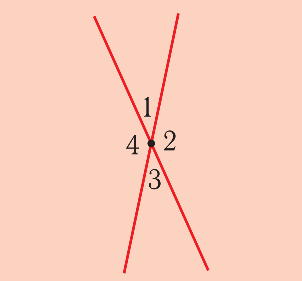


Рис. 2.9

85. Чому дорівнює кут, якщо два суміжні з ним кути дають у сумі 100°?

86. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них на 80° більший за інший.

87. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них на 40° менший від іншого.

88. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них у 5 разів менший від іншого.

89. Визначте величини суміжних кутів, якщо вони відносяться, як 2 : 3.

90. Доведіть, що коли суміжні кути рівні, то вони — прямі.

91. Доведіть, що коли два прямі кути мають спільну сторону, то вони або суміщаються, або є суміжними.

92. Доведіть, що коли кути рівні, то й суміжні з ними кути рівні.

93. Нехай $\angle A$ і $\angle B$ — одна пара суміжних кутів, а $\angle C$ і $\angle D$ — інша. Що можна стверджувати про величини кутів B і D, якщо $\angle A < \angle C$? Як це обґрунтувати?

94. Які з наведених нижче тверджень є істинними, а які — хибними:
1) для кожного кута можна побудувати не більше одного суміжного з ним кута;
2) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а інший — тупий;
3) якщо два кути суміжні, то один із них менший від іншого;
4) якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони — суміжні;
5) якщо сума двох кутів дорівнює 180° і вони мають спільну сторону, то кути — суміжні;
6) якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то вони — не суміжні;
7) якщо два кути мають спільну сторону, то вони — суміжні;
8) якщо сторона одного з кутів є доповняльним променем до сторони іншого, то кути — суміжні?
Проілюструйте ваші відповіді рисунками.

95•. Один із суміжних кутів утричі більший за їхню різницю. Визначте ці кути.

96•. Один із суміжних кутів удвічі менший від їхньої різниці. Визначте ці кути.

97•. Бісектриса кута A утворює з його стороною кут, який удвічі більший за кут, суміжний з кутом A. Визначте кут A.

98•. Величини двох кутів відносяться, як 1 : 3, а величини суміжних з ними кутів — як 4 : 3. Визначте ці кути.

99•. Визначте величину кута, який утворюють бісектриси двох суміжних кутів.

100•. Доведіть, що коли бісектриси двох кутів AOB і BOC утворюють прямий кут, то точки A, O, C лежать на одній прямій.

§6. Вертикальні кути

Уроки 11–12

Означення.

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями до сторін іншого.

При перетині двох прямих утворюється дві пари вертикальних кутів.

Справді, кожна із прямих точкою перетину ділиться на два доповняльних промені. Нехай ці промені позначені a, a' та b, b' (рис. 2.10). Тоді кути $\angle ab$ і $\angle a'b'$, а також $\angle ab'$ і $\angle a'b$ — вертикальні.

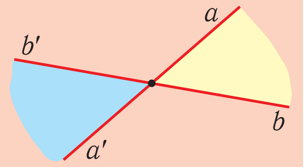


Рис. 2.10

Назва «вертикальні кути» утворена від латинського слова «vertex», одним зі значень якого є «вершина». Отже, у цій назві відображається те, що вертикальні кути мають спільну вершину, а не те, що вони займають вертикальне, тобто прямовисне, положення. Раніше застосовувалася більш влучна назва — протилежні кути.

Теорема
(про вертикальні кути).

Вертикальні кути рівні між собою.

Доведення. Нехай маємо два вертикальних кути $\angle ab$ і $\angle a'b'$ (див. рис. 2.10). Кожен із них є суміжним з кутом $\angle ab'$, а тому в сумі з цим кутом дає 180°:

$$\angle ab + \angle ab' = 180°; \quad \angle a'b' + \angle ab' = 180°.$$

Звідси

$$\angle ab = 180° - \angle ab'; \quad \angle a'b' = 180° - \angle ab'.$$

Виходить, що градусні міри кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ рівні, а тому рівні й самі ці кути. Теорему доведено.

Перше доведення теореми про вертикальні кути давні історики приписують легендарному фундатору античної науки Фалесу Мілетському. Фалес жив у кінці VI – на початку V ст. до н. е. У ті часи вимірювання кутів у градусах ще не було. Тому найімовірніше, що Фалес доводив теорему про вертикальні кути тим, що обґрунтовував можливість суміщення одного з них із іншим шляхом повороту.

Справді, якщо уявити, що півплощину з граничною прямою b, яка містить сторону a першого з вертикальних кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ (див. рис. 2.10), повернули відносно спільної вершини кутів так, щоб ця півплощина сумістилася з іншою півплощиною, то при цьому промінь b суміститься з променем b', а промінь a — з променем a'. Отже, кут $\angle ab$ суміститься з вертикальним кутом $\angle a'b'$. А тому, мабуть робив звідси висновок Фалес, вертикальні кути рівні між собою.

Цією давньою ідеєю з поворотом фігури для доведення теорем ми ще скористаємося.

Фалес. Фрагмент фрески на фасаді національного університету в Афінах

Вправи і задачі

101°. Назвіть пари вертикальних кутів, утворених при перетині прямих AB і CD на рис. 2.11.

102°. Назвіть усі пари вертикальних кутів, які утворюються при перетині трьох прямих в одній точці на рис. 2.12.

103°. Чи є вертикальними кути, зображені на рис. 2.13?

104°. Накресліть за допомогою транспортира кут, що дорівнює 70°, а потім за допомогою лінійки проведіть прямі, які містять сторони цього кута. Скільки кутів

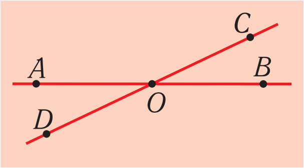


Рис. 2.11

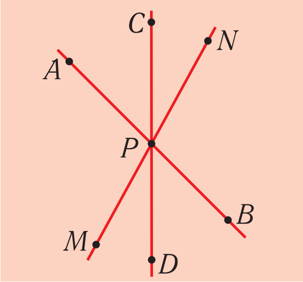


Рис. 2.12

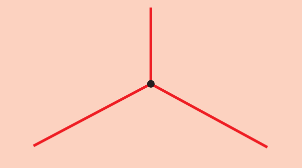


Рис. 2.13

утворилося при перетині цих прямих? Визначте їхні величини вимірюванням і за допомогою обчислення. Чи збігаються результати?

105°. Чи можуть вертикальні кути бути: а) прямими; б) тупими; в) один гострим, а інший — тупим?

106°. Чи істинне таке твердження: «Якщо два кути рівні, то вони — вертикальні»? Проілюструйте відповідь рисунком.

107°. Сума величин двох вертикальних кутів дорівнює 120°. Визначте величину кожного з них.

108°. Якими (гострими, прямими чи тупими) є вертикальні кути, якщо їхня сума: а) менша від 180°; б) більша за 180°; в) дорівнює 180°?

109°. Один із кутів, які утворюються при перетині двох прямих, дорівнює 30°. Чому дорівнюють інші кути?

110. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих ліній, є прямим. Якими можуть бути інші кути? Відповідь обґрунтуйте.

111. Сума двох кутів, які утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 130°. Доведіть, що ці кути — вертикальні.

112. Один із кутів, які утворюються при перетині двох прямих, на 50° менший від іншого. Визначте ці кути.

113. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, учетверо більший за інший. Визначте ці кути.

114. Визначте величини кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо: а) один із них на 20° більший за інший; б) один із кутів дорівнює половині іншого; в) сума величин двох кутів дорівнює 100°.

115. Відомі два із кутів, утворених при перетині трьох прямих в одній точці (рис. 2.14). Визначте кути 1, 2, 3, 4.

116. Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 2.15), Доведіть, що ∠1 + ∠2 + ∠3 = 180°.

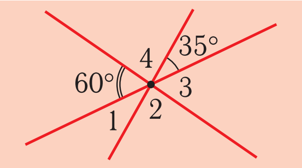


Рис. 2.14

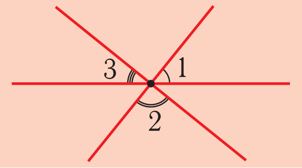


Рис. 2.15

117•. Сума двох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, на 60° менша від суми двох інших. Визначте ці кути.

118•. Сума вертикальних кутів удвічі більша за кут, суміжний з ними обома. Визначте ці кути.

119•. Визначте кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума трьох із них дорівнює 270°.

120•. Один із кутів, що утворилися при перетині двох прямих, удвічі менший від суми решти трьох кутів. Визначте усі ці кути.

121•. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій.

122•. Два рівні кути мають спільну вершину, а їхні бісектриси лежать на одній прямій. Доведіть, що ці кути — вертикальні.

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Геометрія і... математика

Навчальна дисципліна, на уроках з якої ви у попередніх класах ознайомлювалися з окремими геометричними фактами, називалася *математикою*. Окрім геометричних відомостей, на уроках з математики вивчалися ще різні числа та операції з ними, способи складання та розв'язування рівнянь, а також численні приклади застосування цих знань для розв'язування задач із практичним змістом.

Починаючи із 7 класу, математика розділяється на дві окремі математичні дисципліни — геометрію й алгебру (а в старшій школі з алгебри виокремляться ще початки математичного аналізу). Проте зв'язок між окремими математичними дисциплінами ніколи не буде перериватися. Для характеристики геометричних величин будуть застосовуватися алгебраїчні формули й рівняння, а для алгебраїчних формул і рівнянь будуватимуться геометричні моделі у вигляді графіків, схем, діаграм, і це суттєво допомагатиме при аналізі цих формул і при розв'язуванні рівнянь.

Слово «математика» виникло у Давній Греції приблизно у V ст. до н. е. в середовищі піфагорійців — послідовників легендарного Піфагора. Походить воно від слова «матема», що означає «вчення» або

Піфагор. Символічний портрет. Гравюра невідомого художника XVI ст.

«знання». Давні греки визнавали чотири матема: про числа (арифметику), про фігури (геометрію), про пропорції у природі та мистецтві (гармонію) та про форми світу (астрономію). Неодмінною умовою приналежності певного знання до математики було виведення його шляхом логічного міркування, тобто за допомогою мислення. Характерно, що інші науки, наприклад, фізику, географію, історію у Давній Греції не тільки не відносили до «матема», а й узагалі не вважали вартими уваги справжніх учених (філософів). Уважалося, що тільки математика має тверді основи, оскільки вони здобуті розумом, тобто найвищою субстанцією, а не органами відчуття, які часто спонукають людину помилятися.

Перші піфагорійці тримали математичні знання у суворій таємниці від непосвячених і передавали їх «на віру», без належного обґрунтування. Через те їх називали *акусматиками* (від слова «акусма» — «звук», «священний вислів»). Для збереження таємниці передача знання від учителя до учнів відбувалась лише в усній формі. Проте згодом гору взяли *математики*, які вважали, що справжні знання можуть і повинні бути доступні всім і їх потрібно обґрунтовувати.

В епоху середньовіччя давньогрецьке слово *математика* вживалося рідко, а наука, яку ми зараз називаємо математикою, ділилася на арифметику (науку про числа) та геометрію (науку про фігури). Навчальні дисципліни з такими назвами вивчалися лише на дру-

Франческо ді Стефано (бл. 1422—1457). Сім вільних мистецтв.
Зверху — фрагменти картини із зображеннями музи Геометрії та Евкліда

Мартен де Вос (1532–1603). Алегорія семи вільних мистецтв, 1590 р.
Муза Геометрії — на передньому плані ліворуч. В руках у неї циркуль, за допомогою якого вона проводить вимірювання на земному глобусі; біля ніг лежать лінійка й косинець. Поруч з Геометрією — Арифметика, зайнята обчисленнями на дощечці; біля неї книга з написом «ПІФАГОР».
У центрі біля небесного глобуса — муза Астрономії; біля її ніг — сонячний годинник.

гому ступені освіти —так званому *квадрівіумі*. На квадрівіум можна було перейти лише після успішного проходження початкового рівня, який називався *трівіумом* і включав три навчальні предмети: граматику, логіку і риторику (красномовство). Квадрівіум, як про це свідчить його назва, включав чотири предмети: окрім арифметики й геометрії — ще астрономію та музику (гармонію).

Усі сім предметів трівіума і квадрівіума шанобливо називали *вільними мистецтвами* — у тому сенсі, що вони звільняють людину від виснажливої фізичної праці. В епоху Відродження художники й графіки присвятили їм чимало творів, зображаючи їх прекрасними музами на зразок дев'ятьох античних муз, які вважалися покровительками образотворчих мистецтв.

Етьєн Делон
(1518–бл. 1583)
Геометрія (Гравюра)

Корнеліс Корт (1533–1578).
Геометрія (гравюра). Із серії «Вільні мистецтва»

У XVI–XVII ст., коли Європа ознайомилася із здобутками середньовічної арабської науки, з’явилася *алгебра*. Арабською була не лише назва цієї науки, а й зміст — розв’язування рівнянь. Цим античні математики майже не займалися. Певний час з арабським терміном «алгебра» конкурував латинський термін «аналіз», що мав той самий зміст. Однак пізніше аналізом назвали відгалуження алгебри, яке виникло у зв’язку з поняттям функції.

Термін «математика» для сукупної назви арифметики, геометрії, алгебри та аналізу почали систематично застосовувати у XVIII ст. Проте ще у першій половині XIX ст. кожного визначного математика шанобливо називали геометром, навіть якщо він проводив дослідження в іншій галузі математики.

Незважаючи на очевидні відмінності, різні математичні дисципліни мають одну суттєву спільну рису, яка споріднює їх між собою й вирізняє з-поміж інших наук. Усі поняття, які вивчаються у математичних науках, — числа, фігури, формули, функції тощо, є мисленнєвими образами і тому можуть розглядатися й аналізуватися окремо від будь-яких матеріальних носіїв. Після того, як установлені основні властивості цих мисленнєвих образів (у геометрії ці властивості називаються аксіомами, в алгебрі — правилами, законами, формулами), усі інші властивості виводяться із них уже суто логічним шляхом.

П’єр Леґросс Молодший (1666–1719).
Геометрія (Париж, Лувр).

Ангели, що вивчають математику. Деталь розпису стелі у залі Живопису в колишньому королівському морському коледжі у Гринвічі (Англія, кінець XVII ст.). У книзі видно слово Newton.

§7. Кут між прямими. Перпендикулярні прямі

Уроки 13–15

Підведемо підсумок проведеного у попередніх двох параграфах вивчення властивостей кутів, що утворюються при перетині двох прямих. Усього при цьому утворюється чотири кути зі спільною вершиною, сторони яких належать різним прямим (рис. 2.16) (ми не беремо до уваги ще два розгорнуті кути, сторони яких належать одній прямій). Ці чотири кути розпадаються на дві пари вертикальних кутів, які рівні між собою. Будь-які два кути з різних пар є суміжними, а тому їхня сума дорівнює 180°. Отже, якщо один із суміжних кутів гострий, то інший — тупий, а якщо один із них прямий, то інший теж прямий (і тоді всі чотири кути є прямими).

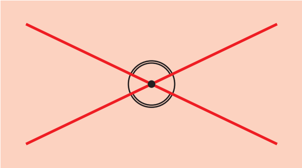


Рис. 2.16

На підставі цього приймається таке означення.

Означення.

***Кутом між двома прямими*, що перетинаються, називається величина гострого або прямого кута, утвореного при перетині цих прямих.**

Звернімо увагу, що, на відміну від кута, утвореного променями, який є фігурою і має градусну міру в межах від 0° до 180°, кут між прямими — це лише величина і вона не перевищує 90°.

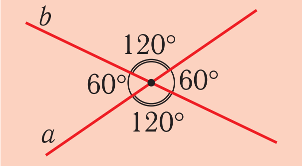


Рис. 2.17

Кут між прямими a і b позначається так: $\angle ab$. Наприклад, у випадку, зображеному на рис. 2.17, $\angle ab = 60°$, а у випадку, зображеному на рис. 2.18, $\angle ab = 90°$.

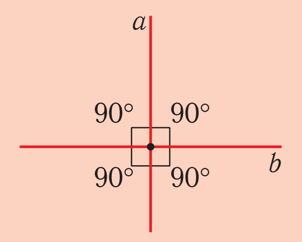


Рис. 2.18

Означення.

Якщо кут між прямими дорівнює 90°, то такі прямі називаються *перпендикулярними* (або *взаємно перпендикулярними*).

Кажуть також, що перпендикулярні прямі перетинаються *під прямим кутом*.

На рис. 2.18 зображені перпендикулярні прямі a і b.

Перпендикулярність прямих позначають за допомогою знака $\perp$. Наприклад: $a \perp b$, $AB \perp CD$ тощо.

На рис. 2.19 і 2.20 відображені способи креслення перпендикулярних прямих за допомогою косинця. На першому з них пряма b, що перпендикулярна до заданої прямої a, проведена через точку A цієї прямої. На другому — пряма b, що перпендикулярна до заданої прямої a, проведена через точку A, яка лежить поза прямою a.

Чи може інша побудова, наприклад, за допомогою транспортира, дати інші перпендикулярні прямі? — Ні, не може, і це можна довести.

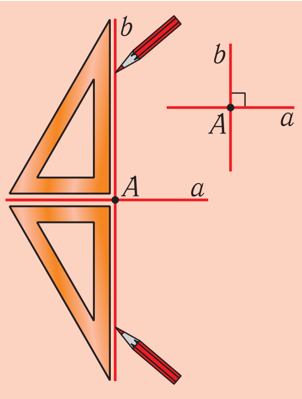


Рис. 2.19

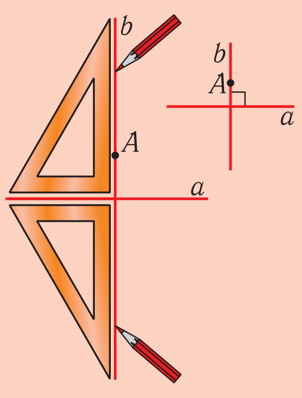


Рис. 2.20

Теорема

(про єдиність перпендикулярної прямої).

Через будь-яку точку можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Доведення. Припустимо, що через точку A, розміщену *на прямій* a, можна провести дві прямі b і c, перпендикулярні до прямої a (рис. 2.21). Нехай буквами b і c позначені і промені цих прямих, що лежать в одній із півплощин з граничною прямою a. Тоді у цій півплощині матимемо два рівних (прямих) кути $\angle ab$ і $\angle ac$, відкладених від однієї півпрямої AX (X — якась точка прямої a, що не збігається з точкою A). Оскільки, за аксіомою про відкладення кутів, таке неможливо, то зроблене припущення хибне. Тому через точку A можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до прямої a.

Припустимо тепер, що через точку A, розміщену *поза прямою* a, можна провести дві прямі b і c, перпендикулярні до прямої a (рис. 2.22). Нехай B і C — точки перетину цих прямих із прямою a.

Уявімо собі, що ту півплощину з граничною прямою a, в якій розміщена точка A, повернуто відносно

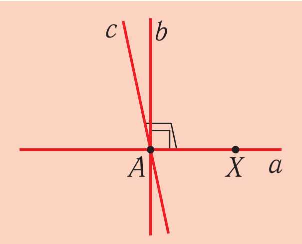


Рис. 2.21

середини O відрізка BC до суміщення з іншою півплощиною. При цьому точка B переміститься у точку C, точка C — у точку B, прямий кут ABC — на рівний йому прямий кут $A'CB$, а прямий кут ACB — на рівний йому прямий кут $A'BC$.

Із того, що кути ABC і $A'BC$ — прямі, випливає, що кут ABA' — розгорнутий, тобто, що точки A, B, A' лежать на одній прямій. Те ж саме стосується й точок A, C, A'. Виходить, що через точки A і A' проходять дві прямі. Ці прямі не можуть збігатися, оскільки пряма a перетинає їх у різних точках B і C. Дістали суперечність з аксіомою про проведення прямої, за якою через дві точки A і A' можна провести лише одну пряму. Із цього можна зробити лише один висновок: а саме, той, що зроблене припущення про існування двох перпендикулярних прямих b і c до прямої a — хибне. Теорему доведено.

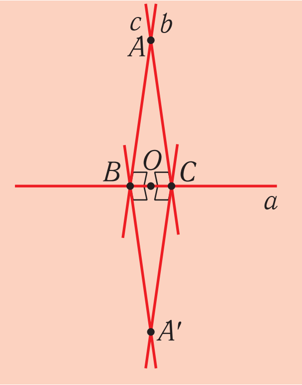


Рис. 2.22

Цікаво зауважити, що, на відміну від перпендикулярної прямої, через будь-яку точку A можна провести *дві* прямі b і c, які перетинають задану пряму a під заданим кутом, який не є прямим (рис. 2.23, а–б) (порівняй з рис. 2.19 і 2.20).

Інколи доводиться вести мову про перпендикулярність не тільки прямих, а й частин прямих — відрізків і променів.

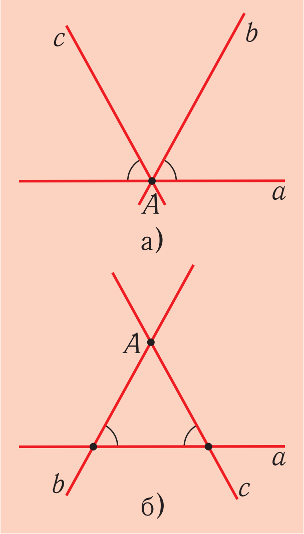


Рис. 2.23

Означення.

Відрізки або промені називаються *перпендикулярними* (кажуть також *взаємно перпендикулярними*), якщо вони лежать на перпендикулярних прямих. Відрізки або промені називаються *перпендикулярними до прямої*, якщо вони лежать на прямих, які перпендикулярні до цієї прямої.

Для короткого запису перпендикулярності відрізків і променів застосовується той самий знак ⊥, що й для прямих.

На рис. 2.24 зображені характерні випадки взаємного розміщення перпендикулярних відрізків, а на рис. 2.25 — характерні випадки взаємного розміщення відрізків, перпендикулярних до прямої.

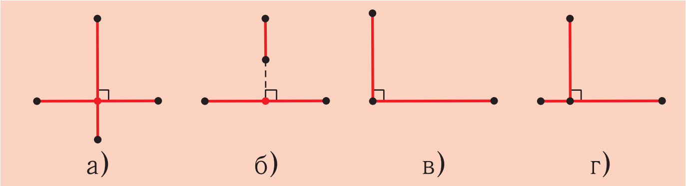


Рис. 2.24

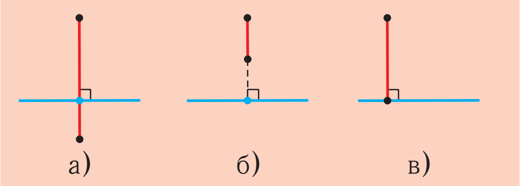


Рис. 2.25

Означення.

Відрізок, який перпендикулярний до прямої і при цьому один з його кінців належить прямій, називається *перпендикуляром* до цієї прямої. Спільна точка прямої і перпендикуляра до неї називається *основою* перпендикуляра.

Аналогічно означається поняття перпендикуляра до променя і до іншого відрізка.

На рис. 2.25, в) зображений перпендикуляр до прямої, а на рис. 2.24, в–г) — перпендикуляри до відрізків.

Терміни «перпендикулярний», «перпендикуляр» утворені від латинського слова perpendicularis, що означає «прямовисний». Прямовисна лінія утворює прямі кути з будь-якою горизонтальною прямою (рис. 2.26). Це й стало підставою для того, аби будь-які прямі чи відрізки, які утворюють прямий кут, називати перпендикулярними. У зв'язку із цим часто замість виразу «*провести* перпендикуляр із точки до прямої» кажуть: «*опустити* перпендикуляр із точки на пряму» або «*поставити* перпендикуляр до прямої у певній точці» на ній, — навіть тоді, коли пряма не займає горизонтального положення (рис. 2.27).

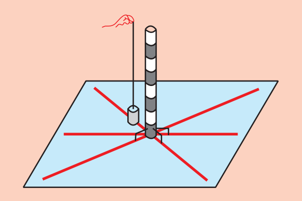


Рис. 2.26

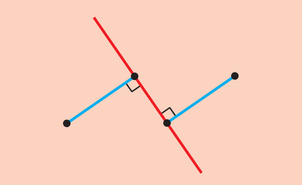


Рис. 2.27

З використанням поняття перпендикуляра уводиться поняття *відстані від точки до прямої*.

Означення.

Відстанню від точки до прямої **називається довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на пряму.**

Підставою саме для такого означення є те, що перпендикуляр MN до прямої a є найкоротшим з усіх відрізків MX, які сполучають точку A з точками X прямої a (рис. 2.28). Поки що у нас немає достатнього теоретичного фундаменту, аби довести це твердження. Ми доведемо його у наступному розділі.

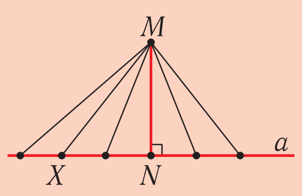


Рис. 2.28

Розв'язуємо разом

Задача.

Визначити кут між двома прямими, якщо сума трьох кутів, утворених при їхньому перетині, дорівнює 300°.

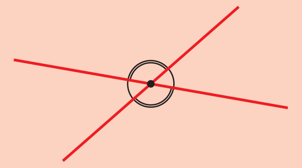


Рис. 2.29

Розв'язання. Як би ми не вибирали три із чотирьох кутів, утворених двома прямими, що перетинаються (рис. 2.29), два із них завжди будуть суміжними, а отже, в сумі дадуть 180°. Тоді на третій кут, за умовою цієї задачі, припадатиме

$$300° - 180° = 120°.$$

Це — тупий кут, а кут між двома прямими дорівнює величині гострого або прямого кута. Тому в цьому разі шуканий кут між прямими дорівнює 180° − 120° = 60°.

Відповідь. 60°.

Вправи і задачі

123°. Позначте точку і за допомогою лінійки проведіть через неї дві довільні прямі. Потім за допомогою транспортира визначте кут між цими прямими.

124°. Накресліть за допомогою лінійки і транспортира дві прямі, кут між якими дорівнює: а) 30°; б) 60°; в) 90°.

125°. Один із кутів, що утворюється при перетині двох прямих, дорівнює 140°. Чому дорівнює кут між цими прямими?

126°. Жоден із кутів, утворених при перетині двох прямих, не є гострим. Чому дорівнює кут між цими прямими?

127°. Перерисуйте в зошит зображення точки P і прямої m, подані на рис. 2.30. Проведіть у кожному випадку за допомогою косинця перпендикуляр із точки P на пряму m. За допомогою лінійки у кожному випадку визначте відстань від точки P до прямої m.

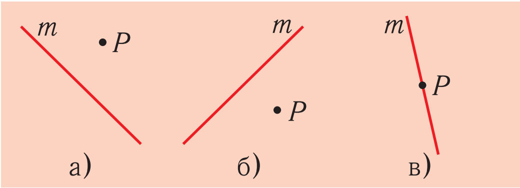


Рис. 2.30

128°. Проведіть пряму і за допомогою лінійки та косинця позначте дві які-небудь точки A і B, що знаходяться від прямої на відстанях відповідно 3 см і 2 см.

129°. Зобразіть за допомогою лінійки і косинця усі характерні випадки взаємного розміщення відрізка і променя, що є взаємно перпендикулярними.

130°. Зобразіть за допомогою лінійки і косинця усі характерні випадки взаємного розміщення двох променів, а також променя і прямої, які є взаємно перпендикулярними.

131. Визначте кут між двома прямими, якщо:
1) сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 100°;
2) сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 200°;

3) сума трьох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 250°;
4) сума трьох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 350°.

132. Визначте кут між двома прямими, якщо один із кутів, що утворилися при їхньому перетині, удвічі менший від іншого.

133. Визначте кут між двома прямими, якщо різниця двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 70°.

134. Визначте кут між двома прямими, якщо сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, учетверо менша від суми двох інших.

135. Визначте кут між двома прямими, якщо сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, більша за суму двох інших на 140°.

136. На рис. 2.31 відображений спосіб перевірки за допомогою лінійки, чи є прямим найбільший кут у косинця (пунктиром зображене попереднє положення косинця). На якій геометричній властивості ґрунтується цей спосіб?

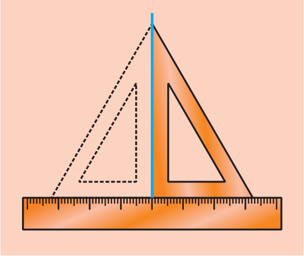


Рис. 2.31

137. На рис. 2.32 відображений спосіб перевірки за допомогою столярного кутника правильності обробки бруса. Як би ви пояснили цей спосіб? На якій геометричній властивості він ґрунтується?


Рис. 2.32

138. На рис. 2.33 відображений спосіб провішування перпендикулярних прямих на місцевості за допомогою екера (у перекладі з французької мови це слово (equerre) означає «кутник»). У найпростішому варіанті екер складається із хрестовини, що кріпиться на ніжці; на кінцях хрестовини вбиті штирки для візування. Як би ви пояснили спосіб використання екера?

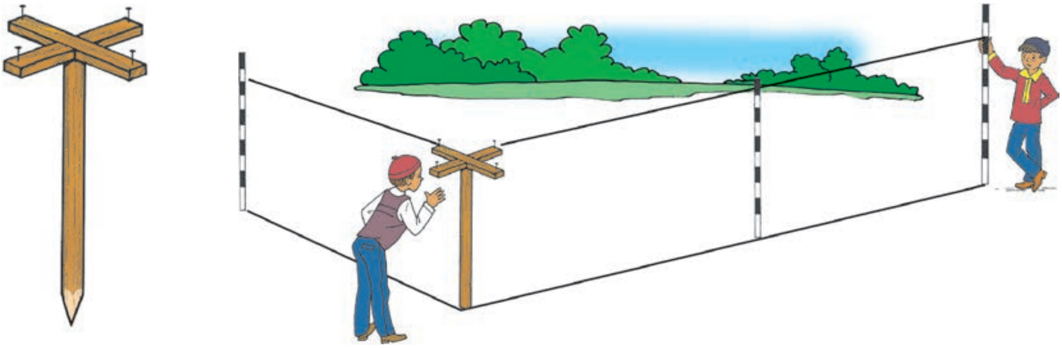


Рис. 2.33

139. Три прямі AB, CD і KM перетинаються в точці O і при цьому $AB \perp CD$, $\angle KOB = 30°$ (рис. 2.34). Визначте кути DOM і KOD.

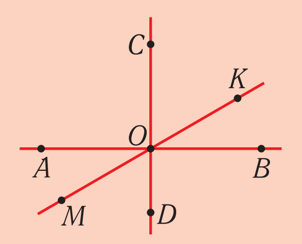


Рис. 2.34

140. На рис. 2.35 $CO \perp AB$, $DO \perp OF$. Доведіть, що тоді $\angle DOC = \angle FOB$.

141•. Визначте кут між прямими, якщо один із кутів, що утворився при їхньому перетині, у вісім разів менший від суми трьох решти кутів.

142•. На рис. 2.35 $\angle AOB = 180°$, $\angle DOC = \angle FOB$, $\angle AOD = \angle COF$. Доведіть, що тоді $CO \perp AB$, $DO \perp OF$.

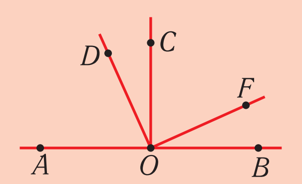


Рис. 2.35

143•. Три прямі AB, CD, KM перетинаються в точці O (див. рис. 2.34) і при цьому $\angle KOA = 125°$, $\angle COM = 145°$. Доведіть, що тоді $AB \perp CD$.

144•. Якого найбільшого і найменшого значення може набувати сума трьох із чотирьох кутів, утворених при перетині двох прямих?

145•. Через одну точку проведено чотири прямі. Скільки серед них може бути взаємно перпендикулярних?